

Recherche d'ensembles de Julia de mesure de  
Lebesgue strictement positive

Arnaud Chéritat

21 Décembre 2001

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>Notations</b>	<b>x</b>
<b>I Explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique</b>	<b>1</b>
<b>1 La taille asymptotique d'un point parabolique</b>	<b>6</b>
<b>2 Explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique</b>	<b>8</b>
<b>3 Application à l'étude de la taille asymptotique</b>	<b>13</b>
3.1 Inégalité 3.3 : la borne supérieure . . . . .	14
3.2 Inégalité 3.4 : la borne inférieure pour les réduites . . . . .	16
<b>4 Application à la convergence de la mesure de l'intérieur de l'ensemble de Julia</b>	<b>18</b>
4.1 Dynamiques normalisées au disque unité . . . . .	18
4.2 Preuve du lemme 4.3 . . . . .	20
4.3 Applications à la famille quadratique . . . . .	34
<b>5 Application à une nouvelle preuve d'un théorème de Yoccoz</b>	<b>37</b>
5.1 Cas simple . . . . .	37
5.2 Cas général . . . . .	39
<b>6 Appendice</b>	<b>52</b>
6.1 Un contre exemple . . . . .	52
6.2 Preuve de la proposition 2.8 . . . . .	54
6.3 Preuve de la proposition 3.4 (d'après Jellouli) . . . . .	56
6.4 Preuve alternative de la proposition 4.16 . . . . .	57
6.5 Remarques concernant la section 5 . . . . .	60
6.6 Remarque sur le théorème de redressement des champs d'ellipses . . . . .	61

<b>II</b>	<b>Semi-continuité dans le théorème de Siegel-Brjuno, par la méthode de Yoccoz</b>	<b>63</b>
1	Définitions et énoncé	66
2	Preuve	68
<b>III</b>	<b>Étude des objets limites de l'implosion parabolique</b>	<b>77</b>
1	Revêtements ramifiés de degré infini et applications pleines	80
1.1	Revêtements ramifiés de degré infini . . . . .	80
1.2	Applications pleines . . . . .	85
2	Enrichissement parabolique dans la famille quadratique	86
2.1	Pétales et coordonnées de Fatou . . . . .	86
2.2	Définition des applications de cornes et de Lavaurs . . . . .	93
2.3	Propriétés de revêtement . . . . .	94
2.4	Les ensembles de Julia-Lavaurs . . . . .	99
3	Échiquier et universalité	104
3.1	Un produit de Blaschke . . . . .	104
3.2	Universalité . . . . .	107
4	Lemmes de connexité locale pour lapins et échiquiers	112
<b>IV</b>	<b>Disques de Siegel virtuels</b>	<b>119</b>
1	Théorèmes	122
2	Construction du modèle	127
2.1	Le modèle . . . . .	127
2.2	Le modèle modifié . . . . .	129
3	Preuves	134
3.1	Théorème 1 . . . . .	134
3.2	Compléments . . . . .	141
4	Appendices	143
4.1	Construction géométrique de la fraction de Blaschke $B$ . . . . .	143
4.2	Lemmes de relèvement d'homéomorphismes . . . . .	144
4.3	Rigidité . . . . .	145

<b>V</b>	<b>Un pas vers la mesure positive</b>	<b>149</b>
<b>1</b>	<b>Notations, conjectures, théorème</b>	<b>153</b>
<b>2</b>	<b>Définitions et outils utilisés</b>	<b>156</b>
2.1	A parte sur les fractions continues . . . . .	156
2.2	Objets limites de l'implosion . . . . .	157
2.3	Disques de Siegel virtuels . . . . .	161
<b>3</b>	<b>Preuve</b>	<b>162</b>
<b>4</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>174</b>

# Remerciements

Je tiens à remercier :

mon directeur de thèse, Adrien Douady, de m'avoir pris comme doctorant et de m'avoir donné ce sujet,

Étienne Ghys, Curtis T. McMullen, Jean-Christophe Yoccoz et Carsten Petersen d'avoir accepté de faire partie de mon jury,

Marguerite Flexor et Tan Lei pour leur relectures et leurs conseils,

Michel Zinsmeister pour sa collaboration sur l'implosion parabolique,

les personnes qui m'ont invité à parler dans leurs séminaires ou conférences, dont Pierrette Sentenac, John Hamal Hubbard, Adam Epstein, Omri Sarig, Sebastian Van Strien, et Michel Zinsmeister,

les personnes avec qui j'ai eu des discussions mathématiques, en particulier Xavier Buff, Nessim Sibony, Michael Yampolsky et Jean-Christophe Yoccoz,

toute l'équipe de topologie et dynamique de l'université, et en particulier sa secrétaire Martine Justin pour sa compétence et sa gentillesse.

## Abstract

We define the asymptotic size of a parabolic fixed point, that enables to prove a conjecture of Douady and to give a new proof of a theorem of Yoccoz.

We give a geometric construction of a holomorphic map, that extends to horn maps some results that the Blaschke fraction  $z^2 \frac{z-3}{1-3z}$  gave for quadratic polynomials with an indifferent fixed point of bounded type rotation number.

We state two conjectures and two hypotheses, and prove that they imply the existence of a  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  such that the polynomial  $P(z) = \rho z + z^2$  with  $\rho = \exp(i2\pi\theta)$  has a Julia set  $J$  of positive Lebesgue measure.

**Key words :** holomorphic dynamics, polynomials, positive measure, parabolic implosion, asymptotic size, linearization, small divisors, quasiconformal mappings, (Siegel disks, Cremer points, Julia sets, quasiconformal surgery, quadratic polynomials).

**A.M.S. classification (MSC 2000) :**

37F, 37F10, 37F30, 37F40, 37F50, (30D05, 32H50)

# Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier la question de l'existence d'une fraction rationnelle  $R$  ayant un ensemble de Julia  $J(R)$  différent de la sphère de Riemann  $\mathbb{S}^2$  et de mesure de Lebesgue strictement positive. Notre opinion est qu'il en existe, et la dernière partie de la présente thèse donne des arguments en sa faveur. Nous nous intéressons plus précisément aux polynômes quadratiques possédant un point fixe indifférent irrationnel en 0 :  $P(z) = \rho z + z^2$  avec  $\rho = e^{i2\pi\theta}$  et  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (dans cette introduction, nous noterons  $P = P_\theta$ ). On note  $K(P)$  l'ensemble de Julia rempli. Nous avons formulé deux conjectures (que des expériences numériques et des analogies semblent appuyer), et deux hypothèses, (dont nous pensons avoir une démonstration, mais qui n'est pas encore écrite), qui à elles 4 impliquent le résultat suivant

MP : existence d'un ensemble dense de valeurs de  $\theta$  tels que  $P$  a un point de Crémer en 0 et tels que la mesure de Lebesgue de  $J(P)$  est  $> 0$ .

La méthode pour obtenir un ensemble de Julia de mesure positive est basée sur une idée de Douady qui se résume en deux conjectures et une proposition, que nous énonçons vaguement :

Conjecture a. Quand on approxime un irrationnel de type constant  $\theta$  par ses réduites  $\theta_n = p_n/q_n$ , alors la limite inférieure de l'aire de  $\overset{\circ}{K}(P_{p_n/q_n})$  est supérieure ou égale à celle de  $\overset{\circ}{K}(P_\theta)$ .

Conjecture b. Soit  $\omega$  un irrationnel de type constant. Quand on approxime un rationnel  $p/q$  par des irrationnels  $\theta_n \rightarrow \theta$  ayant un disque de Siegel de multiplicateur virtuel égal à  $\omega$  dans les cylindres d'Écalles persistant, alors sous certaines conditions, le quotient de la limite inférieure des aire de  $\overset{\circ}{K}(P_{\theta_n})$  par l'aire de  $\overset{\circ}{K}(P_{p/q})$ , est supérieur à une constante  $k < 1$  qui tend vers 1 quand  $q \rightarrow +\infty$  et  $\omega$  est fixé.

Proposition Si les deux conjectures précédentes sont vraies, alors il existe un ensemble de Julia de mesure positive (du type décrit précédemment).

Les conjectures de Douady sont basées sur l'observation de dessins d'ensembles de Julia.

Nous avons démontré la conjecture a. Il se trouve que l'hypothèse sur le type de l'irrationnel est superflue : elle est vraie pour tout  $\theta$  irrationnel (bien sûr elle n'a d'intérêt que quand  $\overset{\circ}{K}$  n'est pas vide, i.e. que quand 0 n'est pas un point de Crémer).

Nous avons écrit la démonstration de la proposition.

Nous avons précisé des conditions dans lesquelles on peut espérer que la conjecture b fonctionne. Nous avons formulé un ensemble de deux conjectures, appelées conjectures 1 et 2, qui impliquent la conjecture b, et écrit cette implication. La preuve utilise également deux *hypothèses*, qui sont des lemmes dont nous n’avons pas écrit la preuve : une de semi-continuité, et une de mesure nulle de certains ensembles de Julia-Lavaurs.

### *Description de chaque partie*

Dans la partie 1 : “Explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique”, on introduit la notion de *taille asymptotique*  $L_a$  d’un point parabolique, qui est un point fixe multiple, que l’on relie à la vitesse d’explosion du point fixe multiple en un cycle, dans le cas du point 0 de la famille  $P = \rho z + z^2$ . On démontre alors un théorème reliant la taille asymptotique du point 0 de  $P_{p_n/q_n}$  au rayon conforme interne en 0 du disque de Siegel  $\Delta$ . Cela nous permet de démontrer la conjecture a, en nous basant sur un travail préliminaire de Jellouli, ainsi que quelques lemmes supplémentaires que nous formulons et prouvons. En particulier nous démontrons un lemme de fuite des points fixes. Nous obtenons également une nouvelle preuve d’un théorème de Yoccoz : si  $\theta$  ne respecte pas la condition de Brjuno, alors 0 est un point de Crémer de  $P_\theta$ .

Dans la partie 2 : “Semi-continuité dans le théorème de Siegel-Brjuno, par la méthode de Yoccoz”, nous démontrons une proposition qui est peut-être déjà connue, et dont nous pensons qu’elle implique l’hypothèse de semi-continuité. Notre preuve se base directement sur les méthodes de renormalisation de Yoccoz.

Dans la partie 3 : “Étude des objets limites de l’implosion parabolique”, nous introduisons ces objets, et donnons ses propriétés élémentaires, en nous basant sur les travaux de Lavaurs et Shishikura. La plupart des résultats de cette partie sont déjà connus. Elle sert essentiellement d’introduction aux deux parties suivantes. Nous y démontrons les propriétés de revêtement des applications de cornes d’un polynôme  $P = \rho z + z^2$  avec  $\rho$  une racine de l’unité, l’universalité de son échiquier parabolique—qui joue un rôle clef dans les deux parties suivantes—des lemmes concernant la géométrie de l’ensemble de Julia de  $P$  et de son échiquier en coordonnées de Fatou, et des raffinements de la locale connexité de  $J(P)$  (destinés à une future preuve de l’hypothèse de mesure nulle).

Dans la partie 4 : “Disques de Siegel virtuels”, nous adaptons la chirurgie de Douady, Herman, et al, pour modéliser certains disques de Siegel dans la famille quadratique au cas des applications de cornes de  $P_{p/q}$ . Nous avons trouvé une construction géométrique d’un analogue  $\beta$  de la fraction de Blaschke  $B(z) = z^2 \frac{z-3}{1-3z}$ . Nous ef-



fectuons ensuite la chirurgie, prouvons qu'elle donne bien une application de cornes, et démontrons quelques lemmes qui seront utilisés dans la partie 5. En particulier, le bord du disque de Siegel virtuel est un quasicercle qui passe par le point critique principal de l'application de cornes.

Dans la partie 5 : "Un pas vers la mesure positive", nous formulons précisément la conjecture b de Douady. Nous démontrons que les conjectures a (démontrée dans la partie 1) et b (toujours ouverte) impliquent MP. Nous formulons les conjectures 1 et 2, ainsi que les deux hypothèses, et nous démontrons qu'ensemble elles impliquent la conjecture b, en nous basant sur les résultats de la partie 4 ; il faut préciser que la philosophie de cette implication est la notion de densité intrinsèque, étudiée par Jellouli dans sa thèse, bien que nous n'utilisions pas ses résultats. Nous montrons également quelques expériences numériques semblant conforter les conjectures 1 et 2, ainsi que l'hypothèse de semi-continuité.

# Notations

Les notations suivantes sont plus ou moins classiques :

- le plan complexe est noté  $\mathbb{C}$
- la translation de vecteur  $c \in \mathbb{C}$  est notée  $T_c$
- $\mathbb{D}$  désigne le disque unité de  $\mathbb{C}$
- $B(z, r)$  la boule de centre  $z$  et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{C}$
- on note “ $i$ ” le nombre complexe et “ $i$ ” l’index
- $\mathbb{N}^*$  désigne  $\mathbb{N}$  privé de  $0$  ; il en est de même pour  $\mathbb{Z}^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mathbb{C}^*$  ...
- pour deux ensembles  $A$  et  $B$  d’un ensemble  $X$ ,  $A \setminus B$  désigne la différence, c’est à dire l’ensemble des points de  $A$  qui n’appartiennent pas à  $B$
- le bord d’un sous ensemble  $A$  d’un espace topologique est noté  $\partial A$ , et son adhérence  $\overline{A}$ , ou parfois  $\text{Adh}(A)$  pour des raisons de place au dessus de  $A$
- la sphère de Riemann est notée  $\mathbb{S}^2$
- le demi-plan supérieur “ $\text{Im}(z) > 0$ ” est noté  $\mathbb{H}$ , le demi-plan inférieur  $-\mathbb{H}$
- si  $X \subset Y$  sont des ensembles,  $f : X \rightarrow Y$  une application, et  $A \subset X$ , on dira que  $A$  est *stable* si  $f(A) \subset A$ , qu’il est *invariant* si  $f(A) = A$ , qu’il est *stable en arrière* si  $f^{-1}(A) \subset A$  qu’il est *invariant en arrière* si  $f^{-1}(A) = A$ , et qu’il est *bi-invariant* si  $f(A) = A = f^{-1}(A)$ .
- $\text{Leb}$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$ .
- un *disque topologique* d’une surface topologique  $S$  est un ouvert connexe homéomorphe à  $\mathbb{D}$
- rappelons qu’un ouvert de  $\mathbb{C}$  est un disque topologique si et seulement si il est non vide, connexe et simplement connexe
- un disque topologique  $U$  d’une surface de Riemann  $S$  est soit analytiquement isomorphe à  $\mathbb{D}$  soit à  $\mathbb{C}$ , les deux cas étant exclusifs ; dans le premier cas, on dit qu’il est hyperbolique
- rappelons qu’un disque topologique  $C$  est hyperbolique si et seulement si il est différent de  $\mathbb{C}$

- le disque unité est muni de la *métrique hyperbolique* induite par la métrique Riemannienne  $\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ ; tout disque topologique hyperbolique  $U$  d'une surface de Riemann est muni de la métrique  $d_U$  induite par l'uniformisation de Riemann, et appelée *métrique hyperbolique* sur  $U$
- le *rayon conforme (interne)* en  $z \in \mathbb{C}$  d'un disque topologique hyperbolique  $U$  de  $\mathbb{C}$ , contenant  $z$ , est l'unique  $r > 0$  tel qu'il existe un difféomorphisme analytique  $\Phi$  de  $U$  vers  $r\mathbb{D}$  avec  $\Phi(z) = 0$  et  $\Phi'(z) = 1$
- pour  $a_i \geq 1$ ,  $[a_0, a_1, \dots]$  désigne le nombre  $\theta$  ayant la suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  pour développement en fraction continue :  $\theta = a_0 + 1/(a_1 + \dots)$
- on dit que le nombre  $\theta$  est de type borné par  $M \in \mathbb{N}^*$ , si  $\forall i \geq 1, a_i \leq M$
- si  $\theta$  est un nombre irrationnel, nous noterons fréquemment  $p_n/q_n$  ses réduites en fraction continue
- pour un point  $x$  d'un espace topologique  $X$ , nous noterons  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$  dans  $X$
- la restriction d'une fonction  $f$  à l'ensemble  $U$  est notée  $f|_U$
- si  $X$  est un ensemble et  $f : X \rightarrow X$  une application, la grande orbite d'un point  $x \in X$  est l'ensemble des points  $y \in X$  tels que  $\exists m, n \in \mathbb{N} f^n(y) = f^m(x)$
- s'il existe une notion de point critique, les points postcritiques sont les points  $f^n(c)$  où  $n \geq 1$  et  $c$  est critique; les points précritiques sont les points  $z$  tels qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $f^n(z)$  soit critique

Les notations suivantes viennent de la dynamique holomorphe.

- soit  $S$  une surface de Riemann,  $U \subset S$  un ouvert et  $f : U \rightarrow S$  une application holomorphe
- à un point fixe  $z$  de  $f$  on peut associer une notion de dérivée  $f'(z) \in \mathbb{C}$
- $z$  est dit *répulsif* si  $|f'(z)| > 1$ , *attractif* si  $|f'(z)| < 1$ , *indifférent* si  $|f'(z)| = 1$
- $z$  est dit *linéarisable* s'il existe un voisinage de  $z$  sur lequel  $f$  est analytiquement conjuguée à sa partie linéaire sur un voisinage de l'origine (rappelons que c'est toujours le cas si  $|f'(z)| \notin \{0, 1\}$ )
- le *disque de Siegel* associé à un point fixe indifférent linéarisable  $z$  est la réunion des ouverts  $U$  tels que  $z \in U$ ,  $f(U) = U$  et sur lesquels  $f$  est analytiquement conjuguée à la rotation  $R : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ou  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de même angle que sa partie linéaire; le disque de Siegel est un disque topologique, invariant par  $f$ , et sur lequel  $f$  est analytiquement conjuguée à  $R : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ou  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

On trouvera des définitions et des propriétés élémentaires des ensembles suivants par exemple dans [CG], ainsi que dans [DH].

- $K(P)$  l'ensemble de Julia rempli du polynôme  $P$
- $J(P)$  son ensemble de Julia
- $M$  l'ensemble de Mandelbrot

Les notations suivantes sont spécifiques à ce document

- “ $\forall p \wedge q = 1$ ” signifie “pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , avec  $q > 0$  et  $p$  et  $q$  premiers entre eux”
- $\mathcal{A}_q^-$  est l'ensemble des entiers modulo  $q$ , et  $\mathcal{A}_q^+$  est l'ensemble des nombres de la forme  $n + \frac{1}{2}$ , modulo  $q$ ;  $\mathbb{Z}$  agit sur ces deux ensembles par translation; on choisira de préférence  $i$  pour noter les indices dans  $\mathcal{A}_q^-$ , et  $j$  les indices dans  $\mathcal{A}_q^+$
- la surface de Riemann quotient  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est homéomorphe à un cylindre, et notée  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$
- le cylindre  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  est isomorphe à la sphère de Riemann privée de deux points par l'application  $z \mapsto e^{i2\pi z}$ ; on peut donc compléter  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  en une surface de Riemann isomorphe à la sphère de Riemann  $\mathbb{S}^2$ , en ajoutant un point à chaque bout (et des cartes supplémentaires), que nous noterons  $+\mathbf{i}\infty$  et  $-\mathbf{i}\infty$  et qui correspondent respectivement aux points  $0$  et  $\infty$  de  $\mathbb{S}^2$ .
- on notera  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  la projection; le contexte permettra de ne pas le confondre avec le réel  $\pi = 3,14\dots$
- la projection  $\pi(A)$  à  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  d'un sous ensemble  $T_1$ -invariant  $A$  de  $\mathbb{C}$  sera également notée  $\overline{A}$ ; on évitera d'utiliser cette notation si  $A$  n'est pas  $T_1$  invariant
- une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $T_1$ -invariant  $A$  de  $\mathbb{C}$  et satisfaisant  $\forall z \in A$ ,  $f(z+1) - z \in \mathbb{Z}$  admet une projection en une fonction de  $\overline{A} : \overline{A} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ , c'est à dire telle que  $\overline{f} \circ \pi = \pi \circ f$

**Attention** : les conventions concernant le polynôme  $P$  ne sont pas les mêmes dans les différentes parties de ce document. Dans la partie “Explosion des points fixes paraboliques ...” on a  $P_\lambda = e^\lambda z + z^2$ , alors que dans les parties “Étude des objets limites ...”, “Disques de Siegel virtuels” et “Un pas vers la mesure positive” on a  $P_\theta = e^{i2\pi\theta} z + z^2$ .

Première partie

Explosion des points fixes  
paraboliques dans la famille  
quadratique



# Introduction

Le but premier de cette étude est de démontrer une conjecture de Douady. Considérons  $P = \rho z + z^2$  où  $\rho$  est un multiplicateur neutre de nombre de rotation  $\theta$  irrationnel de type borné. Ce polynôme a un disque de Siegel en 0. Quand on remplace  $\theta$  par ses réduites  $p_n/q_n$ , donnant un polynôme  $P_n$ , le point 0 devient parabolique avec  $q_n$  pétales. La conjecture de Douady était que l'ensemble de Julia rempli  $K_n$  de  $P_n$  tendait à remplir l'intérieur de l'ensemble de Julia  $K$  de  $P$ , en terme de mesure de Lebesgue. Plus précisément, l'aire du complément de  $K_n$  dans  $\overset{\circ}{K}$  tend vers 0.

L'étude du problème a commencé dans la thèse de Jellouli. Il manquait cependant la notion de taille asymptotique d'un point parabolique (c'est à dire une estimation d'un coefficient du développement en série de  $P_n^{q_n}$  en 0). Nous avons pu mener à terme la preuve de la conjecture, et constaté que l'hypothèse "de type borné" sur le nombre de rotation était superflue.

La méthode employée nous a également permis de trouver une nouvelle preuve du théorème suivant de Yoccoz : si la condition de Brjuno sur  $\theta$  n'est pas vérifiée, alors le polynôme quadratique  $P$  est non linéarisable en 0.

## Notations

Sauf mention contraire, nous utiliserons les notations suivantes :

Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\rho = e^\lambda$  et  $c = \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{4}$ .

On définit les polynômes  $P_\lambda(z) = e^\lambda z + z^2$  et  $Q_c = z^2 + c$ . Ils sont conjugués par la translation de vecteur  $\rho/2$ .

Quand  $\lambda = i2\pi\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta(\theta)$  désignera le disque de Siegel (ouvert) de  $P_\lambda$  en 0 s'il en a un, et  $\emptyset$  sinon. On notera  $r(\theta)$  le rayon conforme (interne) de  $\Delta(\theta)$  en 0 dans le premier cas, et  $r(\theta) = 0$  dans le second cas. On notera  $\mathcal{S}$  l'ensemble des  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $r(\theta) > 0$ .

**Remarque** : Notons que nous n'utiliserons pas ici la caractérisation de Brjuno-Yoccoz de  $\mathcal{S}$  par les réduites de  $\theta$ .

## Théorèmes

**Théorème 1** Pour tout  $\theta \in \mathcal{S}$ , soient  $\frac{p_n}{q_n}$  ses réduites et  $\lambda_n = i2\pi \frac{p_n}{q_n}$  :

1. Pour tout compact  $K \subset \Delta(\theta)$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ , l'itéré  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  n'a pas de point fixe différent de 0 dans  $K$ .
- 2.

$$\text{Leb } \overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{\lambda_n}) \cap \Delta(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Leb } \Delta(\theta)$$

Habib Jellouli a démontré dans sa thèse (Chapitre II, Théorème 3) que l'on déduit du point numéro 2 du théorème 1 la conjecture suivante de Douady :

**Théorème 2**

$$\text{Leb } \overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{\lambda_n}) \cap \overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{i2\pi\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Leb } \overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{i2\pi\theta})$$

**Remarques :**

- Dans ce théorème il est important de considérer  $\overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{i2\pi\theta})$  et non  $\mathbb{K}(P_{i2\pi\theta})$ , car on ne sait pas encore s'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\text{Leb } \partial\mathbb{K}(P_{i2\pi\theta}) > 0$ , et notre analyse ne s'applique qu'à  $\overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{i2\pi\theta})$ .
- Il est par contre indifférent de considérer  $\overset{\circ}{\mathbb{K}}(P_{\lambda_n})$  ou  $\mathbb{K}(P_{\lambda_n})$ , car Douady et Hubbard ont prouvé que le bord de  $\mathbb{K}(P_{\lambda_n})$  a mesure nulle.
- Le théorème reste vrai pour  $\mathbb{K}(Q_{c_n})$  et  $\overset{\circ}{\mathbb{K}}(Q_c)$ , avec  $c_n$  correspondant à  $\lambda_n$  et  $c$  à  $i2\pi\theta$ . En effet, pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{C}$  (et plus généralement pour tout borélien de mesure finie),  $\text{Leb } (\mathcal{O} + z) \times \mathcal{O} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ , où  $A \times B$  désigne la différence symétrique de  $A$  et  $B$ .

**Théorème 3** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$$

Alors  $\theta \notin \mathcal{S}$ .

Ce théorème a déjà été démontré par Yoccoz en 1988 (voir [Y]) mais nous en donnons une preuve complètement indépendante.

Dans le cas où  $\limsup \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} > 0$ , la preuve est nettement plus simple et nous permet de démontrer que le point fixe 0 de  $P_{i2\pi\theta}$  est accumulé par des orbites périodiques de  $P_{i2\pi\theta}$ , ce que l'on appelle des petits cycles.

En utilisant ce dernier résultat et le théorème de R. Pérez Marco (voir [Pm]); il y est démontrée une équivalence, et nous parlons de l'implication la moins difficile à prouver, celle qui n'utilise pas la réversion d'une procédure de renormalisation)



disant que si  $\sum \frac{\ln \ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$ , alors 0 est soit linéarisable soit accumulé par des petits cycles (ce théorème est valable pour tout germe holomorphe de point fixe indifférent ayant ce nombre de rotation, et est l'analogie du théorème de linéarisation de Brjuno), on obtient une alternative complète à la preuve par Yoccoz de la présence de petits cycles :

**Théorème (Yoccoz, 1988)** *Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$$

*Alors le point fixe 0 est accumulé par des orbites périodiques de  $P_{12\pi\theta}$ .*

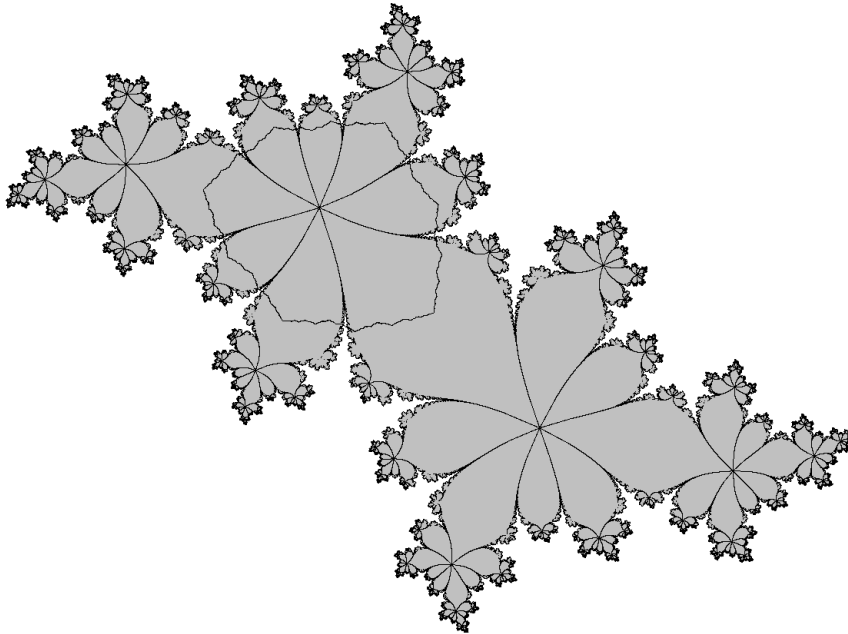


FIG. 1 – Le bord du disque de Siegel de  $P_{12\pi\theta}$ , avec  $\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  (dont une réduite est  $\frac{3}{8}$ ), superposé à l'ensemble de Julia de  $P_{12\pi\frac{3}{8}}$

# 1. La taille asymptotique d'un point parabolique

Soit  $f$  une application holomorphe définie sur un voisinage  $U$  de 0, telle que  $f(0) = 0$  et parabolique en 0, c'est-à-dire telle que  $f'(0) = z^{i2\pi\theta}$  avec  $\theta = p/q$  un irrationnel écrit sous forme irréductible. Il est démontré dans [DH], au chapitre IX, que

$$\text{soit } f^q(z) = z \text{ au voisinage de 0, soit } f^q(z) = z + Cz^{r+1} + O_{z \rightarrow 0}(z^{r+2})$$

avec  $C \in \mathbb{C}^*$  et  $r = \nu q$  où  $\nu \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 1.1** Nous appellerons *taille asymptotique de  $f$  au point parabolique 0* le nombre réel

$$L_a = \left| \frac{1}{rC} \right|^{\frac{1}{r}}$$

Sous la dynamique de  $f$ , 0 attire tout point d'un piège  $V$  ouvert et non vide, appelé fleur de Leau, telle que  $0 \in \overline{V}$  et  $\forall z \in V$ ,  $(\forall n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in V)$  et  $f^n(z) \xrightarrow[n \neq 0]{\neq} 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . La taille asymptotique tire son nom de la proposition suivante :

**Proposition 1.2**

$$\forall z \text{ tel que } f^n(z) \xrightarrow[n \neq 0]{\neq} 0, |f^n(z)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L_a}{n^{1/r}}$$

Celle-ci a pour corollaire la

**Proposition 1.3** Soit  $\phi$  un changement de variable holomorphe défini au voisinage de  $z$ ,  $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$  la conjuguée de  $f$  par  $\phi$ , et  $L'_a$  la taille asymptotique de  $g$  en  $z' = \phi(z)$ . Alors

$$L'_a = |\phi'(z)|L_a$$

Dans [DH], chapitre IX, proposition 6, il est démontré que si  $f$  est un polynôme,  $\nu$  est inférieur ou égal au nombre de points critiques de  $f$ . Comme  $P_\lambda$  n'en a qu'un, nous avons la

**Proposition 1.4**

$$\forall p \wedge q = 1, \exists C \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } P_{i2\pi\frac{p}{q}}^q(z) = z + Cz^{q+1} + O(z^{q+2})$$

Nous noterons  $L_a\left(\frac{p}{q}\right) = \left|\frac{1}{qC}\right|^{1/q}$  la taille asymptotique de  $P_{i2\pi\frac{p}{q}}$  en 0.

## 2. Explosion des points fixes paraboliques dans la famille quadratique

Rappelons la proposition suivante, dont une preuve est esquissée dans [DH2], Chapitre I, § 1, au troisième paragraphe suivant la proposition 3.

**Proposition 2.1 (Douady)** *Le polynôme  $z^2 + c$  possède au plus un cycle non répulsif.*

Soit  $\frac{p}{q}$  une fraction irréductible donnée (nous autorisons  $\frac{0}{1}$ ). Soit  $\lambda_0 = i2\pi\frac{p}{q}$ . D'après la proposition 1.4,  $P_{\lambda_0}^q(z) = z + Cz^{q+1} + O(z^{q+2})$  avec  $C \neq 0$ . Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $P_\lambda^q$  a un point fixe multiple, c'est à dire tels qu'il existe un point  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $P_\lambda^q(z) = z$  et  $(P_\lambda^q)'(z) = 1$ . En particulier,  $\lambda_0 \in \mathcal{P}$ . Soit  $R = R(p/q)$  la distance de  $\lambda_0$  à  $\mathcal{P} \setminus \{\lambda_0\}$ . Soit  $r = R^{1/q}$ ,  $B = B(p/q) = B(\lambda_0, R)$ , et  $o = e^{\lambda_0}$ .

**Proposition 2.2 (suivi de l'explosion)** *Il existe une fonction analytique  $\chi : r\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , un entier  $k \in \mathbb{N}$  et des fonctions analytiques  $\xi_1, \dots, \xi_k : B \rightarrow \mathbb{C}$  telles que :*

- Pour tout  $\delta \in r\mathbb{D}$  non nul et pour  $\lambda = \lambda_0 + \delta^q$ , les points fixes de  $P_\lambda^q$  sont les  $k + 1 + q$  points distincts suivants :  $\xi_1(\lambda), \dots, \xi_k(\lambda)$ , le point 0, et les points du cycle suivant de  $P_\lambda : (\chi(\delta), \chi(o\delta), \dots, \chi(o^{q-1}\delta))$ . Ce sont des points fixes de  $P^q$  de multiplicité 1.
- Pour  $\delta = 0$  et  $\lambda = \lambda_0$ , les points fixes de  $P_\lambda^q$  sont les  $k + 1$  points distincts suivants :  $\xi_1(\lambda), \dots, \xi_k(\lambda)$  avec multiplicité 1, et  $\chi(0) = 0$  avec multiplicité  $q + 1$ .
- $\chi'(0)^q = -\frac{q}{C}$  (en particulier,  $\chi'(0) \neq 0$ )

**Preuve :** Soit  $\lambda \in B$ . La multiplicité des points fixes de  $P_\lambda^q$  est 1 quand  $\lambda \neq \lambda_0$ , car un point fixe est multiple si et seulement si son multiplicateur est égal à 1. Quand  $\lambda = \lambda_0$ , alors le point 0 a multiplicité  $q + 1$  et c'est le seul point parabolique.

Soit

$$F(\lambda, z) = (P_\lambda^q(z) - z)/z$$

une fonction analytique de deux variables  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C}^*$  qui se prolonge analytiquement par  $F(\lambda, 0) = e^{q\lambda} - 1$  à  $\mathbb{C}^2$  tout entier. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , " $F(\lambda, z) = 0$ " est

l'équation des points fixes de  $P_\lambda^q$  auxquels on ôte une multiplicité en 0. Soit

$$\mathcal{A} = \{(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2 \mid F(\lambda, z) = 0\}$$

Pour  $(\lambda, z) \in \mathcal{A}$ , si  $z \neq 0$ , on calcule  $\frac{\partial}{\partial z} F(\lambda, z) = (m-1)/z$  où

$$m = m(\lambda, z) = (P_\lambda^q)'(z)$$

et si  $z = 0$ , alors  $m = 1$ . D'après le théorème des fonctions implicites, si  $m \neq 1$ , alors ' $\lambda$ ' est une coordonnée (analytique) locale pour  $\mathcal{A}$  au voisinage de  $(\lambda, z)$ . Par définition de  $R$ , pour tout  $\lambda \in B \setminus \{\lambda_0\}$ , et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $(\lambda, z) \in \mathcal{A}$ , alors  $m \neq 1$ . Soit

$$\mathcal{A}' = \{(\lambda, z) \in \mathcal{A} \mid \lambda \in B\}$$

et notons  $\Pi_1(\lambda, z) = \lambda$  et  $\Pi_2(\lambda, z) = z$ . Sur  $\mathcal{A}$ , ' $\lambda$ ' est une coordonnée locale tant que  $m \neq 1$ . Sur  $\mathcal{A}'$ , cela arrive seulement pour  $\lambda = \lambda_0$  par définition de  $B$ . Auquel cas  $z = 0$  car  $P_\lambda$  a au plus un cycle parabolique or (0) en est un pour  $\lambda = \lambda_0$ . Au point  $(\lambda_0, 0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \lambda} F = q \neq 0$ , donc ' $z$ ' y est une coordonnée locale. Donc  $\mathcal{A}'$  est une variété analytique complexe lisse (de dimension 1). La fonction  $\Pi_1 : \mathcal{A}' \rightarrow B$  est propre, car il existe un rayon d'échappement  $R(\lambda)$  pour  $P_\lambda$ , dépendant continûment de  $\lambda$ . Elle est analytique, et non ramifiée en dehors de  $(\lambda_0, 0)$ . Donc  $\mathcal{A}'$  est une union finie d'ouverts  $\mathcal{U}_i$ ,  $i \leq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , analytiquement isomorphes à  $\mathbb{D}$  par  $\Pi_1 : \mathcal{U}_i \rightarrow B$ , et d'un ouvert  $\mathcal{V}$  sur lequel  $\Pi_1$  est un revêtement ramifié analytique de degré fini noté  $n$ , avec un unique point de ramification  $(\lambda_0, 0)$ . Ce revêtement ramifié est donc analytiquement isomorphe à  $z \mapsto z^n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . Ceci implique qu'il existe un isomorphisme  $\Phi : r\mathbb{D} \rightarrow \mathcal{V}$  tel que  $\Pi_1(\Phi(\delta)) = \lambda_0 + \delta^n$ . De plus  $(\Pi_2 \circ \Phi)'(0) \neq 0$ , puisque  $z$  est une coordonnée locale en  $(\lambda_0, 0)$ . Développons  $F$  en  $(\lambda_0, 0)$  :

$$F(\lambda_0 + \varepsilon, z) = q\varepsilon + Cz^q + O(\varepsilon z) + O(z^{q+1})$$

En substituant  $\Phi(\delta)$  à  $(\lambda, z)$ , on déduit que  $n = q$ . Soit  $\chi = \Pi_2 \circ \Phi$  et  $\xi_i = \Pi_2 \circ (\Pi_1|_{\mathcal{U}_i})^{-1}$ . La substitution précédente implique également que  $\chi'(0)^q = -q/C$ . On déduit de tout ceci, la présente proposition à une affirmation près : que lorsque  $\lambda \neq \lambda_0$ ,  $(\chi(\delta), \chi(o\delta), \dots, \chi(o^{q-1}\delta))$  est un cycle de  $P_\lambda$ . Il suffit pour cela de démontrer que  $\forall \delta \in r\mathbb{D}$ ,  $\chi(o\delta) = P_\lambda(\chi(\delta))$ . Le deuxième membre est une fonction  $f$  de  $\delta$ . C'est un point fixe non nul de  $P_\lambda^q$ , donc égal par continuité à l'une des fonctions  $\xi_i$  ou  $\chi(o^j\delta)$ . Comme elle vaut 0 en 0, cela ne peut pas être l'une des fonctions  $\xi_i$ . En calculant les dérivées en 0, on en déduit que  $j = 1 \pmod{q}$ . ■

On peut aisément expliciter la valeur de  $k$  :  $k = 2^q - q - 1$ , mais cette valeur ne jouera aucun rôle dans la suite.

La dérivée  $|\chi'(0)|$  représente la vitesse d'explosion du cycle (par rapport à la racine  $q$ -ième de la perturbation). Noter que le dernier point de la proposition permet de relier cette vitesse à la taille asymptotique du point parabolique 0 de  $P_{\lambda_0}$  :

$$|\chi'(0)| = q^{2/q} L_a \left( \frac{p}{q} \right)$$

Ces deux nombres sont donc comparables pour de grandes valeurs de  $q$  puisque

$$q^{2/q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1$$

**Remarque** : Des arguments heuristiques (en particulier le calcul  $\frac{\partial}{\partial \lambda} m = -q^2$  en  $\lambda_0$ ) indiquent que l'échelle naturelle du membre  $M_{p/q}$  attaché en  $\lambda_0$  est  $1/q^2$ . Si on calcule la vitesse d'explosion en termes de la racine  $q$ -ième de  $q^2(\lambda - \lambda_0)$ , on trouve *exactement*  $L_a(p/q)$ . Cette égalité (taille asymptotique = vitesse d'explosion par rapport à la racine  $q$ -ième de la perturbation dans un système de paramètres  $c$  tel que  $|\partial m / \partial c| = 1$ ) est d'ailleurs vraie pour des familles plus générales.

**Théorème 2.3 (minoration du rayon paramétrique)**

Il existe une suite  $(R_q)_{q \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall p \wedge q = 1$ ,  $R \left( \frac{p}{q} \right) \geq R_q$  et

$$R_q \sim \frac{\text{cste}}{q^3}$$

**Remarque** : Nous conjecturons que l'on peut en fait prendre  $R_q \sim \frac{\text{cste}}{q^2}$ . Ce serait le cas si dans l'inégalité de Yoccoz, on avait une majoration en  $1/q^2$  au lieu de  $1/q$ . Nous conjecturons également que c'est le meilleur équivalent possible.

Le reste de cette section est dédié à la preuve du théorème 2.3. Nous introduisons d'abord quelques notations et résultats classiques.

**Définition 2.4** Nous noterons  $M_\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid c \in M \}$

Rappelons que 'c' est lié par définition à  $\lambda$ .

**Proposition 2.5**

L'ensemble  $M_\Lambda$  est connexe, fermé et contient le demi-plan " $\text{Re}(z) \leq 0$ ".

$\forall p \wedge q = 1$ ,  $M_\Lambda \setminus \{ i2\pi \frac{p}{q} \}$  possède deux composantes connexes. L'une contient le demi-plan " $\text{Re}(z) < 0$ " l'autre est appelée membre  $p/q$ , et notée  $M_{\frac{p}{q}}$ .

Voir [T], corollaire D.5, pour une preuve. Notons que notre définition de membre exclue sa racine,  $i2\pi p/q$ .

**Proposition 2.6 (Yoccoz)** Le membre  $p/q$  est inclus dans le disque fermé de rayon  $\frac{\ln 2}{q}$ , tangent à l'axe imaginaire  $i\mathbb{R}$  en  $i2\pi \frac{p}{q}$ , et situé à droite de celui-ci.

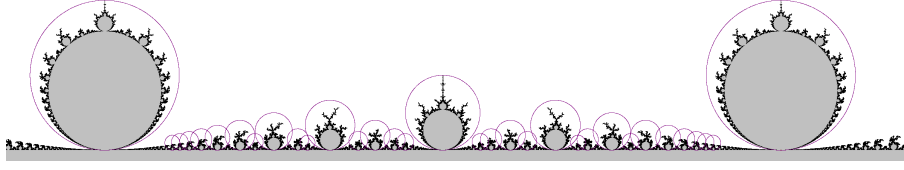


FIG. 2.1 – L'ensemble  $\Lambda$  et quelques cercles de Yoccoz (on a tourné la figure de  $90^\circ$ )

Cette proposition est illustrée par la figure 2.1. Voir [H] pour une preuve. On y trouve également (proposition 4.2, p. 477) la preuve de la

**Proposition 2.7 (Yoccoz, “pas de membre fantôme”)**  $M_\Lambda$  est la réunion du demi-plan “ $\text{Re}(z) \leq 0$ ” et de ses membres.

On peut également consulter [T], théorème D.3 appliqué à  $c_0 = 1/4$ .

**Proposition 2.8**  $\forall p \wedge q = 1, \forall \lambda \in M_{\frac{p}{q}}$ , si le polynôme  $P_\lambda$  a un point parabolique  $z$  de période  $k$ , alors soit  $k > q$ , soit  $k = q$  et alors  $(P_\lambda^q)'(z) \neq 1$ .

**Preuve :** Cette proposition m'a été communiquée par Adrien Douady. Comme je n'ai pas trouvé de référence écrite, j'ai inclus une preuve appendice 6.2. La preuve de Douady repose sur les arbres de Hubbard, celle que nous proposons sur les rayons externes. ■

*Preuve du théorème 2.3 :*

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  différent de  $\lambda_0 = i2\pi\frac{p}{q}$ , et supposons que  $P_\lambda^q$  a un point fixe multiple : alors d'après la proposition 2.8 soit  $\lambda = i2\pi r/q$  avec  $r \in \mathbb{Z}$ , soit  $\lambda$  est dans un membre  $M_{\frac{k}{m}}$ , d'ordre  $m < q$ . Dans le premier cas,

$$\text{dist}(\lambda, \lambda_0) \geq \frac{2\pi}{q}$$

Dans le deuxième cas,  $q > m \geq 1$ , donc  $q \geq 2$ , et d'après la proposition 2.6 ce membre est inclus dans un disque fermé  $\mathcal{C}_{k/m}$  de rayon  $\ln(2)/m$  et tangent en  $i2\pi k/m$  à  $i\mathbb{R}$ . Minorons la distance de  $\lambda_0$  à ce disque : d'après le théorème de Pythagore (voir figure 2.2),

$$\text{dist}\left(i2\pi\frac{p}{q}, \mathcal{C}_{k/m}\right) = \sqrt{\left(2\pi\left(\frac{k}{m} - \frac{p}{q}\right)\right)^2 + \left(\frac{\ln 2}{m}\right)^2} - \frac{\ln 2}{m}$$

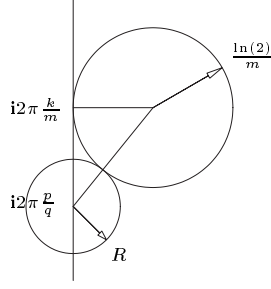


FIG. 2.2 – Cadre dans lequel on utilise le théorème de Pythagore

Or  $\left| \frac{k}{m} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{qm}$ , donc

$$\text{dist} \left( i2\pi \frac{p}{q}, \mathcal{C}_{k/m} \right) \geq \frac{\sqrt{\left( \frac{2\pi}{qm} \right)^2 + \left( \frac{\ln(2)}{m} \right)^2} - \frac{\ln 2}{m}}{4\pi^2} = \frac{1}{q^2 m \left( \sqrt{\frac{4\pi^2}{q^2} + \ln(2)^2} + \ln 2 \right)}$$

Puisque  $m \leq q - 1$ ,

$$\text{dist} \left( i2\pi \frac{p}{q}, \mathcal{C}_{k/m} \right) \geq \tilde{R}_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\pi^2}{q^2 (q-1) \ln(2) \left( \sqrt{\left( \frac{2\pi}{q \ln 2} \right)^2 + 1} + 1 \right)}$$

Soit  $R_q = \min \left( \tilde{R}_q, \frac{2\pi}{q} \right) = \tilde{R}_q$  pour  $q \geq 2$ , et  $R_1 = 2\pi$ . Alors  $R_q$  convient et

$$R_q \underset{q \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\pi^2}{q^3 \ln 2}$$

Ce qui démontre le théorème 2.3 □



### 3. Application à l'étude de la taille asymptotique

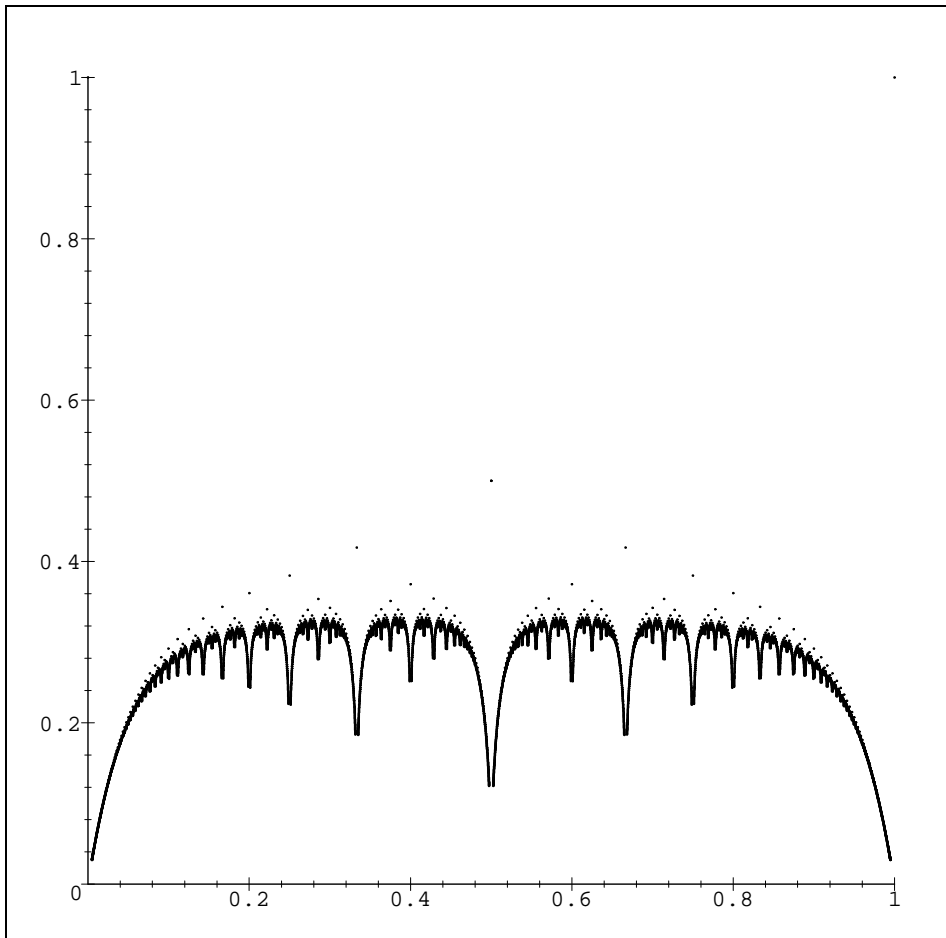


FIG. 3.1 – Graphe des  $L_a(p/q)$  en fonction de  $p/q$ , pour  $q \leq 200$

Rappelons que  $r(\theta)$  désigne le rayon conforme interne en 0 du disque de Siegel de  $P_{12\pi\theta}$  s'il y en a un, et 0 sinon. Nous allons démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.1**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \limsup_{\substack{p \rightarrow \theta \\ q \neq 0}} \left( L_a \left( \frac{p}{q} \right) \right) = r(\theta) \quad (3.1)$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( L_a \left( \frac{p_n}{q_n} \right) \right) = r(\theta) \quad (3.2)$$

où  $p_n/q_n$  sont les réduites de  $\theta$ .

Pour cela, il suffit de démontrer les deux inégalités suivantes :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \limsup_{\substack{p \rightarrow \theta \\ q \neq 0}} \left( L_a \left( \frac{p}{q} \right) \right) \leq r(\theta) \quad (3.3)$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( L_a \left( \frac{p_n}{q_n} \right) \right) \geq r(\theta) \quad (3.4)$$

**3.1 Inégalité 3.3 : la borne supérieure**

Considérons la fonction  $\chi$  donnée par la proposition 2.2. Comme elle dépend de  $p/q$ , nous la noterons  $\chi_{p/q}$ . Nous utiliserons le théorème suivant :

**Théorème 3.2 (théorème de convergence de Carathéodory)**

(version adaptée) Soit  $U_n$  une suite décroissante d'ouverts connexes et simplement connexes de  $\mathbb{C}$ , contenant 0, et  $\phi_n : r_n \mathbb{D} \rightarrow U_n$  ( $r_n \in ]0, +\infty[$ ) l'isomorphisme analytique qui envoie 0 sur 0 avec dérivée 1 en ce point. Alors  $r_n$  est une suite décroissante. Soit  $I = \bigcap U_n$ . Si  $0 \notin \overset{\circ}{I}$ , alors  $r_n \rightarrow 0$  et la suite de fonctions  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \phi_n(r_n, z)$  tend vers 0 uniformément sur tout compact. Si  $0 \in \overset{\circ}{I}$ , soit  $U'$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{I}$  qui contient 0. Alors l'ouvert  $U'$  est simplement connexe. Soit  $\phi : r \mathbb{D} \rightarrow U'$  l'isomorphisme correspondant ( $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = 1$ ,  $r \in ]0, +\infty[$ ). Alors  $r_n \rightarrow r$  et  $\phi_n \rightarrow \phi$  uniformément sur tout compact de  $r \mathbb{D}$  et  $\phi_n^{-1} \rightarrow \phi^{-1}$  uniformément sur tout compact de  $U'$ .

On trouvera une preuve de ces énoncés très classiques par exemple dans [P]. Fixons maintenant  $\theta \in \mathbb{R}$ . Notons que si 0 est linéarisable pour  $P_{12\pi\theta}$ , alors  $\Delta(\theta)$  est la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$  qui contient 0 ; si 0 n'est pas linéarisable, alors  $0 \in \partial K$ . Considérons l'équipotentielle  $\mathcal{E}$  de  $P_{12\pi\theta}$  de potentiel  $\varepsilon$ . Elle sépare  $\mathbb{C}$  en deux composantes connexes, et nous appellerons  $V_\varepsilon$  la composante bornée. Soit  $\Phi_\varepsilon$  l'isomorphisme de  $V_\varepsilon$  vers  $s_\varepsilon \mathbb{D}$  ( $s_\varepsilon \in ]0, +\infty[$ ) qui envoie 0 sur 0 avec dérivée 1. Comme

$$K(P_{12\pi\theta}) = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon$$

on déduit du théorème de Carathéodory que

$$s_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} r(\theta)$$

et ce même si  $r(\theta) = 0$ . Notons que l'on pourrait utiliser au lieu de  $V_\varepsilon$  n'importe quelle autre suite décroissante de voisinages ouverts simplement connexes de  $\mathbb{K}$  tendant vers  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 3.3 (Douady)** *La fonction  $\lambda \mapsto K(P_\lambda)$  de  $\mathbb{C}$  dans l'ensemble des compacts non vides de  $\mathbb{C}$  est semi-continue supérieurement pour la semi-distance de Hausdorff  $d^+$  (c'est à dire  $\forall \lambda_0 \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda - \lambda_0| < \eta \Rightarrow d^+(K_\lambda, K_{\lambda_0}) < \varepsilon$ ).*

Cette semi-distance est donnée pour tous compacts non vides  $K$  et  $L$  par

$$d^+(K, L) = \sup_{z \in K} \text{dist}(z, L)$$

On trouvera une preuve de cette proposition dans [D]. Fixons maintenant  $\varepsilon > 0$ . L'ouvert  $V_\varepsilon$  contient  $K(P_{i2\pi\theta})$ . Il existe donc un voisinage  $W$  de  $i2\pi\theta$  pour lequel  $\forall \lambda \in W, K(P_\lambda) \subset V_\varepsilon$ . Attention :  $K$  dépend de  $\lambda$  mais pas  $V_\varepsilon$ . Quand  $\frac{p}{q} \xrightarrow{\neq} \theta$ , alors  $q \rightarrow +\infty$  (nous supposons implicitement que  $p \wedge q = 1$ ). Donc le diamètre du disque paramétrique  $B(p/q)$  (défini page 8) tend vers 0. Donc ce disque est inclus dans  $W$  pour  $p/q$  suffisamment proche de  $\theta$ , ce que nous supposerons maintenant. Pour tout  $\delta \in R_q^{1/q}\mathbb{D}$ ,  $\chi_{p/q}(\delta)$  est un point périodique de  $P_\lambda$  donc appartient à  $K(P_\lambda)$ , avec  $\lambda = i2\pi\frac{p}{q} + \delta^q \in B(p/q)$ . Donc  $\chi_{p/q}(\delta) \in V_\varepsilon$  puisque  $\lambda \in W$ . Soit

$$\kappa_{p/q, \varepsilon} = \Phi_\varepsilon \circ \chi_{p/q} : R_q^{1/q}\mathbb{D} \rightarrow s_\varepsilon\mathbb{D}$$

Cette fonction envoie 0 sur 0, donc d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left| \kappa'_{p/q, \varepsilon}(0) \right| \leq \frac{s_\varepsilon}{R_q^{1/q}}$$

Or  $\kappa'_{p/q, \varepsilon}(0) = \chi'_{p/q}(0)$  et  $|\chi'_{p/q}(0)| = q^{2/q} L_a(p/q)$ . Donc

$$L_a(p/q) \leq s_\varepsilon \cdot (q^2 \cdot R_q)^{-1/q}$$

Quand  $q \rightarrow +\infty$ ,  $R_q \sim \text{cste}/q^3$ , donc  $(q^2 \cdot R_q)^{-1/q} \rightarrow 1$ . Donc

$$\limsup_{\frac{p}{q} \xrightarrow{\neq} \theta} L_a\left(\frac{p}{q}\right) \leq s_\varepsilon$$

Ceci étant valable pour n'importe quelle valeur de  $\varepsilon > 0$ , on en déduit

$$\limsup_{\frac{p}{q} \xrightarrow{\neq} \theta} L_a\left(\frac{p}{q}\right) \leq r(\theta)$$

Ce qui démontre l'inégalité 3.3.

### 3.2 Inégalité 3.4 : la borne inférieure pour les réduites

La preuve de cette borne inférieure vient d'une analyse différente, effectuée par Habib Jellouli dans sa thèse (voir [J]). La proposition suivante est une conséquence directe de cette analyse. Soit  $p_n/q_n$  la suite des réduites de  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , et  $\lambda_n = i2\pi \frac{p_n}{q_n}$ .

**Proposition 3.4 (Jellouli)** *Supposons  $r(\theta) > 0$ . Soit  $\Phi : \Delta(\theta) \rightarrow r(\theta)\mathbb{D}$  l'isomorphisme conforme envoyant 0 sur 0 avec dérivée 1. Soit  $F_\lambda = \Phi \circ P_\lambda \circ \Phi^{-1}$ . Alors pour tout compact  $C$  de  $r(\theta)\mathbb{D}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ , les  $q_n$  premières itérées de  $F_{\lambda_n}$  sont définies sur  $C$  et ne sortent pas de  $r(\theta)\mathbb{D}$ . On a de plus une constante  $K > 0$  (dépendant de  $C$ ) telle que  $\forall z \in C$ ,  $\forall n \geq N$ , et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{si } k \leq q_n \text{ alors } |F_{\lambda_n}^k(z) - e^{k\lambda_n} \cdot z| \leq \frac{K|z|k}{q_n^2}$$

En particulier  $F_{\lambda_n}^{q_n} \rightarrow \text{Id}$  uniformément sur tout compact de  $r(\theta)\mathbb{D}$ .

Nous donnons une preuve en appendice 6.3, d'après la thèse de Jellouli.

**Lemme 3.5** *Soit  $G_n : D_n \rightarrow \mathbb{C}$  une suite de fonctions holomorphes ayant en 0 un point fixe de multiplicité finie notée  $q_n$ . Soit  $L_n$  la taille asymptotique de  $G_n$ . Nous supposons que :*

- la suite  $q_n \rightarrow +\infty$
- pour tout compact de  $\mathbb{D}$ , il existe un rang à partir duquel  $D_n$  contient ce compact, et la suite  $G_n$  est bornée sur ce compact

Alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} L_n \geq 1$$

**Preuve :** Développons  $G_n$  :

$$G_n(z) = z + C_n z^{q_n+1} + O(z^{q_n+2})$$

où  $C_n \neq 0$  et  $L_n = \left| \frac{1}{q_n C_n} \right|^{\frac{1}{q_n}}$ . Fixons  $r < 1$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $G_n$  soit défini sur  $r\mathbb{D}$ , et notons  $M$  un majorant de la suite  $|G_n|$  sur  $r\mathbb{D}$ . D'après la formule de Cauchy,

$$C_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{r\partial\mathbb{D}} \frac{G_n(z)}{z^{2+q_n}} dz$$

Donc

$$|C_n| \leq \frac{M}{r^{1+q_n}}$$

Donc

$$L_n \geq r \left( \frac{r}{q_n M} \right)^{1/q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$$

Donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} L_n \geq r$$

Ceci étant valable pour tout  $r < 1$ , on en déduit

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} L_n \geq 1$$

■

**Remarque** : d'après la proposition 1.3, pour tout  $a \in ]0, +\infty[$ , cette proposition est vraie plus généralement si on remplace le domaine de définition  $\mathbb{D}$  par  $a\mathbb{D}$  et la conclusion par “ $\liminf L_n \geq a$ ”.

Comme  $\Phi'(0) = 1$ , on a d'après la proposition 1.3

$$L_a(F_{\lambda_n}) = L_a(p_n/q_n)$$

D'après la proposition 3.4, on peut appliquer la remarque suivante le lemme 3.5 à la suite  $G_n = F_{\lambda_n}^{q_n}$  : une suite tendant vers l'identité est en particulier bornée sur tout compact. On en déduit

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} L_a(p_n/q_n) \geq r(\theta)$$

Ce qui démontre l'inégalité 3.4.

## 4. Application à la convergence de la mesure de l'intérieur de l'ensemble de Julia

### 4.1 Dynamiques normalisées au disque unité

Dans cette section, nous étudions les suites de fonctions  $(G_n)$  vérifiant les hypothèses du lemme 3.5, c'est-à-dire :  $0 \in D_n \subset \mathbb{D}$ ,  $G_n : D_n \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe, a en 0 un point fixe de multiplicité finie notée  $q_n$  (ces  $q_n$  n'ont pas besoin d'être les dénominateurs des réduites d'un réel),  $q_n \rightarrow +\infty$  et pour tout compact de  $\mathbb{D}$ , il existe un rang à partir duquel  $D_n$  contient ce compact et la suite  $(G_n)$  est bornée sur ce compact. On appelle  $L_n$  la taille asymptotique de  $G_n$ . D'après le lemme 3.5, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\liminf L_n \geq 1$ .

**Lemme 4.1** *Il existe une suite  $r_n \in ]0, 1[$  telle que  $r_n \rightarrow 1$ ,  $G_n$  est définie sur  $r_n \overline{\mathbb{D}}$ , et la fonction  $F_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto r_n^{-1} G_n(r_n z)$  vérifie les mêmes hypothèses que  $G_n$  et de plus tend uniformément vers l'identité.*

**Preuve :** Soient  $r$  et  $r'$  deux réels tels que  $0 < r' < r < 1$ . Pour  $n$  suffisamment grand, la suite  $G_n$  est définie sur  $r \overline{\mathbb{D}}$  et y est bornée par une certaine constante  $M$ . La fonction  $G_n(z) - z$  est bornée par  $M + 1$  sur  $r \overline{\mathbb{D}}$  et s'annule à l'ordre  $1 + q_n$  en 0. Par le lemme de Schwarz,  $(G_n(z) - z)/z^{q_n+1}$  est donc majorée par  $(M + 1)/r^{q_n+1}$  et donc  $|G_n(z) - z| \leq (M + 1)|z/r|^{q_n+1}$ . En particulier, sur  $r' \overline{\mathbb{D}}$ ,  $|G_n(z) - z| \leq (M + 1)(r'/r)^{q_n+1}$ , borne qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ceci étant valable pour tous  $r$  et  $r'$  tels que  $0 < r' < r < 1$ , on en déduit le lemme. ■

Nous ferons dorénavant l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$(\mathcal{H}) \quad L_n \rightarrow 1$$

Cela signifie que le terme en  $C_n z^{q_n+1}$  dans le développement de  $G_n$  n'est pas trop petit, et on espère le voir dominer la dynamique.

**Lemme 4.2** *Faisons l'hypothèse  $L_n \rightarrow 1$ . Pour tout  $r \in ]0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $N_n(r)$  le nombre de points fixes non nuls de  $G_n$  situés dans  $r \overline{\mathbb{D}}$ , comptés avec multiplicité :*

$$N_n(r) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(q_n)$$

**Preuve :** La suite  $r_n$  du lemme 4.1 tendant vers 1, il suffit de démontrer le présent lemme pour la suite  $F_n$  donnée par ce lemme.

Nous supposons donc que chaque fonction  $G_n$  est définie au voisinage de  $\overline{\mathbb{D}}$  et que la suite  $G_n$  tend uniformément vers l'identité, donc en particulier est bornée, disons par  $M$ .

Adoptons les mêmes notations que dans la preuve du lemme 3.5. Pour  $n \geq N$  et  $r \in ]0, 1]$ , soit  $N_n(r)$  le nombre de points fixe non nuls de  $G_n$  dans  $r\mathbb{D}$  comptés avec multiplicité, et  $(\zeta_{n,i})_{i=1, \dots, N_n(r)}$  ces points. Il existe une fonction analytique  $g_n(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\frac{G_n(z) - z}{z^{q_n+1}} = g_n(z) \prod_{i=1}^{N_n(1)} \frac{z - \zeta_{n,i}}{1 - z\bar{\zeta}_{n,i}}$$

Puisque  $(z - \zeta_{n,i})/(1 - z\bar{\zeta}_{n,i})$  a module 1 quand  $|z| = 1$ , le principe du maximum implique que  $g_n$  est bornée sur  $\mathbb{D}$  par  $M + 1$ . Maintenant,

$$C_n = g_n(0) \prod_{i=1}^{N_n(1)} -\zeta_{n,i}$$

Fixons un réel  $r \in ]0, 1[$  :

$$|C_n| \leq (M + 1)r^{N_n(r)}$$

$$\ln |C_n| \leq \ln(M + 1) - N_n(r)|\ln r|$$

car  $\ln(r) < 0$ , et donc

$$\frac{N_n(r)}{q_n} \leq \frac{\ln(M + 1) - \ln |C_n|}{q_n |\ln r|}$$

Or les hypothèses  $q_n \rightarrow +\infty$  et  $L_n \rightarrow 1$  impliquent que  $\frac{1}{q_n} \ln |C_n| \rightarrow 0$ . Donc  $N_n(r)/q_n \rightarrow 0$ . ■

**Remarque :** En choisissant soi-même  $N_n(1)$  et les  $\zeta_{n,i}$ ,  $i = 1, \dots, N_n(1)$ , et en posant  $g_n(z) = 1$ , on peut construire diverses fonctions  $G_n$  avec la formule de la preuve. Pour que  $L_n \rightarrow 1$ , il faut et suffit que  $\frac{1}{q_n} \sum_{i=1}^{N_n(1)} \ln |\zeta_{n,i}| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par exemple, pour tout  $r \in ]0, 1[$  et pour toute suite  $a_n = o(q_n)$ , il existe une suite  $G_n$  pour laquelle  $L_n \rightarrow 1$  et  $N_n(r) = a_n$ . En particulier l'hypothèse  $L_n \rightarrow 1$  n'implique pas que les points fixes non nuls doivent finir par sortir de tout compacts. Ceux-ci peuvent même être de plus en plus nombreux et tendre vers 0.

**Lemme 4.3** *Faisons l'hypothèse  $L_n \rightarrow 1$ . Supposons de plus que pour tout compact  $C$  de  $\mathbb{D}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ ,  $G_n$  n'a pas de point fixe non nul dans  $C$ . Soit  $A_n$  l'ensemble des points de  $\mathbb{D}$  dont l'orbite future par itération de  $G_n$  est définie à tout rang, ne quitte jamais  $\mathbb{D}$ , et tend vers 0 sans l'atteindre.*

$$\text{Leb } \mathbb{D} \setminus A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Nous prouvons ce lemme dans la section suivante. Notons qu' $A_n$  est ouvert, car une orbite qui tend vers un point parabolique sans tomber dessus doit finir par entrer dans un pétale attractif.

## 4.2 Preuve du lemme 4.3

Dans un premier temps, on remarque à l'aide du lemme 4.1 et de l'hypothèse de fuite des points fixes qu'il suffit de démontrer le lemme 4.3 pour les suites  $G_n$  vérifiant en plus : chaque  $G_n$  est définie au voisinage sur  $\overline{\mathbb{D}}$ , la suite  $G_n$  tend uniformément vers l'identité sur  $\mathbb{D}$ , et n'y a pas de point fixe non nul.

*Changement de coordonnées :*

Nous posons  $z = e^w$ . Soit  $\mathcal{L}$  le demi-plan gauche " $\operatorname{Re}(w) < 0$ ".

Soit  $l$  la branche du logarithme définie sur  $1 + \mathbb{D}$  et envoyant 1 sur 0. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand,  $|G_n(z) - z| < 1$  sur  $\mathbb{D}$ , et s'annule en 0, donc d'après le lemme de Schwarz,  $|(G_n(z) - z)/z| < 1$ , c'est-à-dire  $|1 - G_n(z)/z| < 1$ . Nous poserons donc  $d_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$d_n(z) = l(G_n(z)/z)$$

C'est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , qui tend uniformément vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Soit  $H_n(w) : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$ , défini par

$$H_n(w) = w + s_n(w)$$

$$s_n(w) = d_n(e^w)$$

La fonction  $H_n$  commute avec la translation de  $i2\pi$  et on a la semi-conjugaison suivante :  $\forall w \in \mathcal{L}$ ,

$$\exp \circ H_n(w) = G_n \circ \exp(w)$$

Il existe une fonction  $h_n$  définie sur  $\mathbb{D}$ , qui ne s'annule pas et telle que  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,

$$d_n(z) = z^{q_n} h_n(z)$$

La fonction  $h_n$  tend uniformément vers 0 et vaut  $C_n$  en 0 (notons que les multiples changements d'échelle éventuels  $r_n$  effectués ont modifié la valeur de  $C_n$ , qui tend maintenant vers 0, ainsi que de  $L_n$ , qui tend toujours vers 1). Comme  $h_n$  ne s'annule pas,  $h_n = \exp \circ k_n$  où  $k_n$  est une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{C}$ . Ainsi,

$$s_n(w) = \exp(l_n(w)) \text{ où}$$

$$l_n(w) = q_n w + k_n(e^w)$$



La fonction  $s_n$  représente le *pas* “ $H_n(w) - w$ ”. Intéressons-nous à sa direction :

$$\text{Arg } s_n(w) = \text{Im}(l_n(w)) \pmod{2\pi}$$

nous posons donc

$$a_n(w) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(l_n(w)) = q_n \text{Im } w + \text{Im } k_n(e^w)$$

Nous allons démontrer que le terme  $\text{Im } w$  est dominant.

Pour  $n$  suffisamment grand,  $|h_n| < 1$ , donc  $k_n$  est à valeur dans  $\mathcal{L}$ . Comme  $\exp(k_n(0)) = C_n$  et  $L_n \rightarrow 1$  (donc  $C_n^{1/q_n} \rightarrow 1$ ), on en déduit que quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\text{Re}(k_n(0)/q_n) \rightarrow 0$$

### Restriction à un sous-disque

Fixons maintenant  $\varepsilon > 0$ . Nous allons nous restreindre à l'étude de la dynamique des fonctions  $H_n$  sur le demi-plan  $\mathcal{L}_\varepsilon$  défini par l'équation “ $\text{Re}(w) < -\varepsilon$ ”. Soit  $r = e^{-\varepsilon} < 1$ . Alors, uniformément sur  $r\mathbb{D}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$|d_n| = o(r^{q_n})$$

$$\text{Re}(k_n/q_n) \rightarrow 0$$

$$\forall m \geq 1, k_n^{(m)}/q_n \rightarrow 0$$

Les deuxième et troisième lignes viennent de l'énoncé suivant, appliqué à la fonction  $z \mapsto k_n(z)/k_n(0)$  : pour tout compact  $C$  de  $\mathbb{D}$ , et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe  $M > 0$  tel que pour toute fonction holomorphe  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  envoyant 0 sur 1,  $\max_{z \in C} |f^{(m)}(z)| \leq M$ . Soit donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $|k'_n/q_n| \leq \frac{1}{4}$  sur  $r\mathbb{D}$ . Nous supposerons dans la suite de cette section que  $n \geq N$ . Calculons

$$l'_n(w) = q_n + e^w k'_n(e^w)$$

Donc en particulier, sur  $\mathcal{L}_\varepsilon$ ,

$$\left| \frac{l'_n}{q_n} - 1 \right| < \frac{1}{4} \tag{4.1}$$

En particulier,

$$|\text{Arg } l'_n(z)| < \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{4} \tag{4.2}$$

L'inégalité 4.1 implique également que  $a_n$  est strictement croissante sur chaque verticale, de dérivée  $\geq 3q_n/4$  et  $\leq 5q_n/4$ . Sur une hauteur de  $2\pi$ , elle augmente d'exactly  $2\pi q_n$ .

*Les isoclines*

Par analogie avec les champs de vecteurs, nous appellerons *isoclines* les composantes connexes des ensembles  $\{w \in \mathcal{L}_\varepsilon \mid a_n(w) = \text{cste}\}$ . Il se trouve que ces derniers sont déjà connexes, et que ce sont des graphes au dessus de  $] -\infty, -\varepsilon[$ , de fonctions  $x \mapsto y$  de pente inférieure à  $\tan(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{15}}$ . Ces affirmations sont une conséquence du théorème des fonctions implicites et de l'inégalité 4.2. Nous noterons  $I_\alpha = a_n^{-1}(\alpha) \cap \mathcal{L}_\varepsilon$  l'isocline d'angle  $\alpha$ . Nous dirons que  $w \in \mathbb{C}$  est en dessous (resp. au dessus) de l'isocline d'angle  $\alpha$  si  $\text{Re}(w) < -\varepsilon$  et  $a_n(w) < \alpha$  (resp.  $> \alpha$ ).

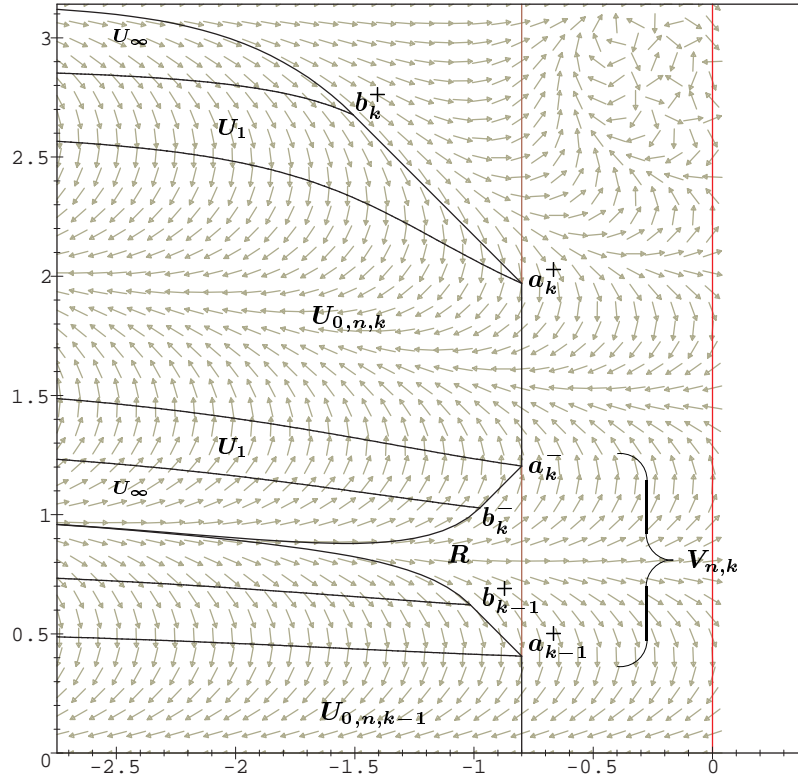
**Lemme 4.4** *La distance  $d$  entre deux isoclines, d'angles respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ , vérifie*

$$d \geq \frac{4}{5} \frac{|\beta - \alpha|}{q_n}$$

**Preuve** : Soit  $w \in I_\alpha$  et  $w' \in I_\beta$ . Si on avait  $|w - w'| < \frac{4}{5} \frac{|\beta - \alpha|}{q_n}$  alors d'après l'inégalité 4.1, on aurait  $|l_n(w) - l_n(w')| < |\beta - \alpha|$ , donc  $|\beta - \alpha| = |a_n(w') - a_n(w)| = |\text{Im}(l_n(w')) - \text{Im}(l_n(w))| < |\beta - \alpha|$ , ce qui est absurde. ■

*Pièges*

Nous allons construire des pièges pour la dynamique de  $H_n$  sur  $\mathcal{L}_\varepsilon$ .

FIG. 4.1 – Exemple de pièges avec  $\varepsilon = 0,8$ 

$U_{0,n}$  :

Soit  $U_{0,n}$  l'ensemble des points  $w \in \mathcal{L}_\varepsilon$  tels que  $a_n(w) \in ]\pi/2, 3\pi/2[ \pmod{2\pi}$ .

**Lemme 4.5** *Pour  $n$  suffisamment grand,  $U_{0,n}$  est un piège pour  $H_n$ . La partie réelle de l'orbite de tout point de  $U_{0,n}$  tend vers  $-\infty$ .*

**Preuve :**

Une composante connexe  $U_{0,n}$  est de la forme

$$U_{0,n,k} = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) < -\varepsilon \text{ et } \frac{\pi}{2} + k2\pi < a_n(w) < \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right\}$$

pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $w \in U_{0,n,k}$  et montrons que  $w + s_n(w) \in U_{0,n,k}$  : il y a deux conditions à vérifier.

1. Comme  $\operatorname{Arg}(s_n(w)) = a_n(w) \in \left] \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right[ \pmod{2\pi}$ , on a  $\operatorname{Re}(s_n(w)) < 0$ , donc

$$\operatorname{Re}(w + s_n(w)) < -\varepsilon$$

2. Soit  $d_n = \frac{4}{5} \frac{|\pi/2 - \alpha_1|}{q_n}$  la borne inférieure donnée par le lemme 4.4 correspondant à  $\beta = \pi/2$  et  $\alpha = \alpha_1 = \arcsin(1/4)$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, r^{q_n} \leq d_n$ . Soient les angles  $\beta_0 = k2\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta_1 = k2\pi + \pi - \alpha_1$ ,  $\beta_2 = k2\pi + \pi + \alpha_1$ ,  $\beta_3 = k2\pi + 3\frac{\pi}{2}$ . On a  $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ . Nous distinguerons selon que  $a_n(w) \in ]\beta_0, \beta_1]$ ,  $]\beta_1, \beta_2[$  ou  $[\beta_2, \beta_3[$  :

– Si  $w$  est au dessus de l'isocline  $\beta_1$ , alors comme la taille du pas  $|s_n(w)|$  est  $< r^{q_n}$  donc  $< d_n \leq \text{dist}(I_{\beta_0}, I_{\beta_1})$ . Donc  $H_n(w)$  est au dessus de l'isocline  $\beta_0$ .

– De même, si  $w$  est au dessous de l'isocline  $\beta_2$ , alors  $H_n(w)$  est au dessous de l'isocline  $\beta_3$ .

– Si  $a_n(w) \in ]\beta_0, \beta_1]$ , alors la direction du pas  $s_n(w)$  appartient à ce même intervalle, donc à l'intervalle plus grand  $]\alpha_1, \pi - \alpha_1[$ . Il est de plus au dessus de l'isocline  $\beta_0$  qui est un graphe au dessus de  $]-\infty, -\varepsilon]$  dont les tangentes font un angle inférieur ou égal à  $\alpha_1$  avec l'horizontale. Donc  $H_n(w) = w + s_n(w)$  est également au dessus de l'isocline  $\beta_0$ .

– De même, si  $a_n(w) \in [\beta_2, \beta_3[$ , alors  $H_n(w)$  est au dessous de  $I_{\beta_3}$ .

$U_{0,n,k}$  est donc un piège.

*Remarque* : on a un peu mieux. Tout point  $w$  tel que  $a_n(w) \in ]\beta_0, \beta_1]$  vérifie  $a_n(H_n(w)) \in ]\beta_0, \beta_1]$ . Tout point  $w$  tel que  $a_n(w) \in [\beta_2, \beta_3[$  vérifie  $a_n(H_n(w)) \in [\beta_2, \beta_3[$ .

Montrons maintenant la deuxième affirmation : sur  $U_{0,n,k}$ ,  $\text{Re}(s_n) < 0$  donc la partie réelle de l'orbite  $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$  d'un point  $w_0$  de  $U_{0,n}$  est strictement décroissante. Si elle convergerait, alors  $\text{Re}(s_n(w_m)) \rightarrow 0$ , donc  $a_n(w_m)$  doit tendre vers  $\{\pi/2 + k2\pi, 3\pi/2 + k2\pi\}$ , ce qui est impossible d'après la remarque. ■

$U_{1,n}$  :

L'ensemble  $U_{1,n}$  est défini à partir de  $U_{0,n}$  comme suit : soit  $k \in \mathbb{Z}$  ; à partir du point  $a_k^-$  (resp.  $a_k^+$ ) du bord de  $\mathcal{L}_\varepsilon$  tel que  $a_n(w) = \pi/2 + k2\pi$  (resp.  $3\pi/2 + k2\pi$ ), on trace la demi-droite issue de  $a_k^-$  (resp.  $a_k^+$ ), contenue dans  $\mathcal{L}_\varepsilon$  et de pente 1 (resp.  $-1$ ). Elle croise, entre autres, l'isocline d'angle  $\pi/4 + k2\pi$  (resp.  $7\pi/4 + k2\pi$ ) en un unique point  $b_k^-$  (resp.  $b_k^+$ ), puisque la pente des isoclines est  $< 1$ . Nous avons omis l'indice  $n$  dans ces points  $w$  pour alléger les notations. Soit  $\gamma_1$  la portion de l'isocline d'angle  $\pi/4 + k2\pi$  située entre  $-\infty$  et  $b_k^-$ , et  $\gamma_2$  la portion de l'isocline d'angle  $7\pi/4 + k2\pi$  située entre  $-\infty$  et  $b_k^+$ . Soit  $U_{1,n,k}$  l'ensemble des points de  $\mathcal{L}_\varepsilon$  situés au dessus de  $\gamma_1 \cup [b_k^-, a_k^-]$  et en dessous de  $\gamma_2 \cup [b_k^+, a_k^+]$ . On définit  $U_{1,n}$  comme la réunion pour  $k \in \mathbb{Z}$  des  $U_{1,n,k}$ .

**Lemme 4.6** *Pour  $n$  suffisamment grand, pour tout  $k$ ,  $U_{1,n,k}$  est un piège pour  $H_n$  sur  $\mathcal{L}_\varepsilon$ .*

**Preuve :** Démontrons que les points de  $U_{1,n} \setminus U_{0,n}$  ont leur image dans  $\mathcal{L}_\varepsilon$ . Un point  $w \in U_{1,n,k}$  dont l'image sort de  $\mathcal{L}_\varepsilon$ , est à distance euclidienne inférieure à  $l$  de  $a_k^-$  ou de  $a_k^+$  (disons  $a_k^-$  pour fixer les idées), où  $l = \operatorname{Re}(s_n(w))\sqrt{2}$  (car les bords de  $U_{1,n}$  et  $U_{0,n}$  dans  $\mathcal{L}_\varepsilon$  ont une pente de valeur absolue inférieure ou égale à 1 ce qui fait que  $w$  appartient au secteur “ $\operatorname{Arg}(a_k^- - z) \in [-\pi/4, \pi/4]$ ”) :  $0 < |w - b_k^-| \leq l$ . Donc d'après l'inégalité 4.1,

$$|a_n(w) - a_n(b_k^-)| \leq \frac{5}{4}q_n l$$

Or  $a_n(b_k^-) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ . Par conséquent,

$$l = |s_n(w)| \cos(a_n(w))\sqrt{2} \leq |s_n(w)| \frac{5\sqrt{2}}{4}q_n l$$

Or  $l > 0$  :

$$1 \leq q_n |s_n(w)| \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Or  $|s_n| = o(r^{q_n})$  uniformément sur  $\mathcal{L}_\varepsilon$ . L'inégalité ne peut donc plus être vérifiée pour  $n$  supérieur à un certain rang, qui ne dépend pas de  $w$  ni de  $k$ . Les points  $w \in U_{1,n}$  ont alors leur image dans  $\mathcal{L}_\varepsilon$ .

Le reste est analogue à la preuve du lemme 4.5 : si  $w \in U_{1,n,k}$  est situé en dessous de  $U_{0,n,k}$ , alors son image est au dessus de  $\gamma_1 \cup [b_k^-, a_k^-]$  car cette courbe a une pente comprise entre  $-1$  et  $1$ , et en dessous de  $I_{3\pi/2+k2\pi}$  donc de  $\gamma_2 \cup [b_k^+, a_k^+]$  pour des raisons de taille du pas et de distance entre les isoclines. De même si  $w$  est situé au dessus de  $U_{0,n,k}$ . ■

$V_{n,k}$  :

Les  $V_{n,k}$  que nous allons définir seront des pièges pour la dynamique inverse de  $H_n$ .

Soit  $V_{n,k}$  défini par  $w \in \mathcal{L}_\varepsilon$  et  $a_n(w) \in ]-\pi/2 + k2\pi, \pi/2 + k2\pi[$ . La fonction  $H_n$  est injective sur “ $\operatorname{Re}(z) < 0$ ”, donc en particulier sur  $V_{n,k}$ . L'ouvert  $V_{n,k}$  contient les points  $b_k^-$  et  $b_{k-1}^+$ .

**Lemme 4.7** *Pour  $n$  suffisamment grand, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $H_n(V_{n,k}) \supset V_{n,k}$ .*

**Preuve :** L'ensemble  $H_n(V_{n,k})$  est l'image continue d'un connexe donc est connexe. Il contient des points de  $V_{n,k}$  : en effet un point suffisamment à gauche sur l'isocline 0 a un pas  $s_n(w)$  de module inférieur à la distance de  $I_{k2\pi}$  à  $I_{\pi/2+k2\pi}$  et  $I_{-\pi/2+k2\pi}$ , qui est non nulle d'après le lemme 4.4.

L'adhérence de  $V_{n,k}$  dans  $\mathcal{L}$  coïncide avec son adhérence dans  $\mathbb{C}$ . De plus, la restriction de  $H_n$  à  $\overline{V_{n,k}}$  tend vers  $\infty$  en  $\infty$ , et  $H_n$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{L}$  sur son image. On en déduit que  $\partial H_n(V_{n,k}) = H_n(\partial V_{n,k})$ .

Le domaine  $H_n(V_{n,k})$  est donc un domaine de Jordan dans  $\mathbb{S}^2$ , adhérent à  $\infty$  : le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de son bord a deux composantes connexes, dont  $H_n(V_{n,k})$ .

L'image de l'isocline  $\pi/2 + k2\pi$  est au dessus d'elle-même, l'image de l'isocline  $-\pi/2 + k2\pi$  est en dessous d'elle-même, et l'image du segment  $[a_{k-1}^+, a_k^-]$  est à droite du bord de  $\mathcal{L}_\varepsilon$ . Donc  $V_{n,k} \cap \partial H_n(V_{n,k}) = \emptyset$ . Donc le connexe  $V_{n,k}$  est inclus dans une des deux composantes connexe de  $\mathbb{C} \setminus \partial H_n(V_{n,k})$ . Comme l'une de ces deux composantes est  $H_n(V_{n,k})$  qui contient des points de  $V_{n,k}$ , on en déduit le lemme. ■

Soit  $g$  la réciproque de  $H_n|_{\mathcal{L}_\varepsilon}$  (qui rappelons-le est injective). La fonction  $g$  envoie  $H_n(V_{n,k})$  dans  $V_{n,k} \subset H_n(V_{n,k})$ . En particulier,  $g$  envoie  $V_{n,k}$  dans  $g(V_{n,k}) \subset V_{n,k}$ , donc elle contracte la métrique hyperbolique  $d_{V_{n,k}}$  de  $V_{n,k}$ .

**Lemme 4.8**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{4(1 + \frac{\sqrt{2}}{4})} \frac{\pi}{q_n} &\leq |b_k^- - a_k^-| \leq \frac{\sqrt{2}}{4(1 - \frac{\sqrt{2}}{4})} \frac{\pi}{q_n} \\ \frac{4}{5} \frac{\pi}{q_n} &\leq |a_k^- - a_{k-1}^+| \leq \frac{4}{3} \frac{\pi}{q_n} \\ 0,19 &\leq \frac{|b_k^- - a_k^-|}{|a_k^- - a_{k-1}^+|} \leq 0,69 \end{aligned}$$

des inégalités similaires tiennent en remplaçant  $|b_k^- - a_k^-|$  par  $|b_{k-1}^+ - a_{k-1}^+|$ .

**Preuve :** Le segment  $[b_k^-, a_k^-]$  est de pente 1. Soit  $l$  sa longueur :

$$\frac{\pi}{2} = a_n(a_k^-) - a_n(b_k^-) = \text{Im} \int_{[0,1]} l \frac{1+i}{\sqrt{2}} l'_n ((1-t).b_k^- + t.a_k^-) dt$$

Donc d'après l'inégalité 4.1,  $\frac{\pi}{4} = l \cdot \text{Im} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} q_n (1+r.e^{i\theta}) \right)$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r \in [0, 1/4]$ .

$$l = \frac{\pi\sqrt{2}}{4q_n(1+r.\sqrt{2}\sin(\theta + \pi/4))}$$

d'où la première ligne.

La deuxième ligne est une conséquence directe de 4.1 et la dernière ligne s'obtient à partir des deux premières. ■

Note : en fait on a de meilleures inégalité, car si au lieu d' $1/4$  on prend une borne arbitrairement petite dans l'inégalité 4.1, alors on obtient dans le lemme précédent des bornes arbitrairement proche de respectivement pour chaque ligne des valeurs  $\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\pi}{q_n}$ ,  $\frac{\pi}{q_n}$  et  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Lemme 4.9** *Il existe  $\alpha_2 < \pi/4$  tel que pour tout  $n$  suffisamment grand, pour tout tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le segment  $[b_k^-, b_{k-1}^+]$  fait avec la verticale un angle  $\leq \alpha_2$ . Ce segment a une longueur majorée par la longueur de  $[a_k^-, a_k^+]$ .*

**Preuve :** C'est une conséquence directe de la troisième inégalité du lemme 4.8, et du fait que  $0,69 < \sqrt{1/2}$  comme illustré sur la figure 4.2, page 27. ■

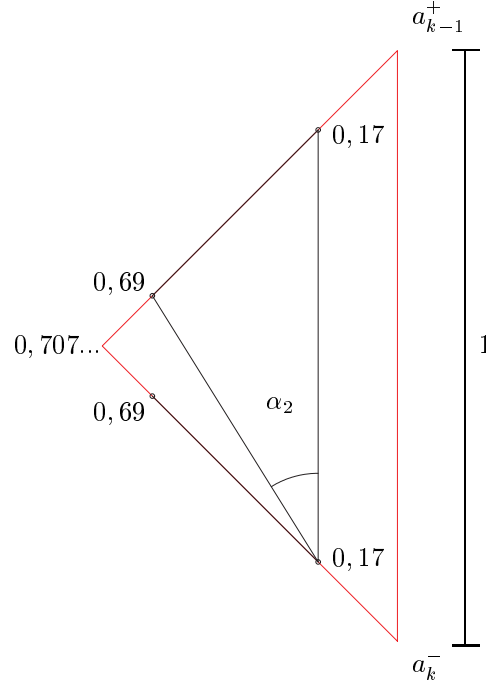


FIG. 4.2 – Illustration du lemme 4.9 (sur ce dessin, nous avons exagéré la distance entre la pointe 0.707 et le point 0.69)

*Note* : en fait cet angle tend vers 0, car si au lieu de prendre  $1/4$  dans l'inégalité 4.1 on prend une valeur arbitrairement petite, alors  $\alpha_2$  est arbitrairement petit.

D'après le lemme 4.4, les points  $b_k^-$  et  $b_{k-1}^+$  sont à distance  $\geq \frac{\pi}{5q_n}$  des isoclines bordant  $V_{n,k}$ . Notons que c'est aussi le cas de tous les points du segment  $[b_k^-, b_{k-1}^+]$ , car sa direction diffère d'au plus  $\pi/4$  de la verticale, alors que la pente des isoclines est inférieure à  $\alpha_1 = \arcsin(1/4)$ .

**Lemme 4.10** *Pour tout  $n$  suffisamment grand, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\frac{K_1}{q_n} \leq -\varepsilon - \operatorname{Re}(b_k^\pm) \leq \frac{K_2}{q_n}$$

où  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$  sont des constantes universelles (rappelons que  $\operatorname{Re}(a_k^\pm) = -\varepsilon$ ).

**Preuve** : C'est une conséquence directe de la première ligne du lemme 4.8. ■

**Lemme 4.11** *Pour  $n$  suffisamment grand,  $d_{V_{n,k}}(b_k^-, b_{k-1}^+) \leq A$ , où  $A$  est une constante universelle.*

**Preuve** : D'après le lemme 4.8, tout point du segment  $[b_k^-, b_{k-1}^+]$  est à une distance euclidienne  $\geq \frac{\pi}{(4 + \sqrt{2})q_n}$  du bord de  $\mathcal{L}_\varepsilon$  et d'après le lemme 4.4, à distance  $\geq \frac{\pi}{5q_n}$  des isoclines bordant  $V_{n,k}$ . Donc ils sont à distance  $\geq \frac{\pi}{(4 + \sqrt{2})q_n}$  du bord de

$V_{n,k}$ . Donc  $\frac{\|dw\|_U}{|dw|} \leq \frac{(4 + \sqrt{2})q_n}{\pi}$ . Avec le lemme 4.9, on en déduit  $d_U(b_k^-, b_{k-1}^+) \leq \frac{4(4 + \sqrt{2})}{3}$ . ■

$U_{\infty,n}$  :

Considérons le segment  $\gamma_k^-$  reliant  $b_k^-$  à  $H_n(b_k^-)$ , et le segment  $\gamma_k^+$  reliant  $b_k^+$  à  $H_n(b_k^+)$ . Notons que ces deux segments sont inclus respectivement dans les segments  $[b_k^-, a_k^-]$  et  $[b_k^+, a_k^+]$  pour  $n$  suffisamment grand (la borne supérieure  $r^{q_n}$  sur le pas étant négligeable devant la borne inférieure  $\text{cste}/q_n$  de la longueur de ces segments, voir le lemme 4.8) donc dans respectivement  $V_{n,k}$  et  $V_{n,k+1}$ . Considérons la courbe  $\mathcal{C} =$

$$\left( \bigcup_{m \geq 1} g^m(\gamma_k^-) \right) \cup [b_k^-, a_k^-] \cup [a_k^-, a_k^+] \cup [a_k^+, b_k^+] \cup \left( \bigcup_{m \geq 1} g^m(\gamma_k^+) \right)$$

**Lemme 4.12**

1.  $\mathcal{C} \cap U_{1,n} = \emptyset$
2. La partie  $\mathcal{C}_-$  de la courbe  $\mathcal{C}$  située avant  $b_k^-$  est incluse dans  $V_{n,k}$ . La partie  $\mathcal{C}_+$  située après  $b_k^+$  est incluse dans  $V_{n,k+1}$ .
3. Par conséquent,  $\mathcal{C}$  est située entre les isoclines  $-\pi/2 + k2\pi$  et  $\pi/2 + (k+1)2\pi$ .
4. Les parties  $\mathcal{C}_-$  et  $\mathcal{C}_+$  sont des graphes au dessus de respectivement  $]-\infty, \text{Re}(b_k^-)]$  et  $]-\infty, \text{Re}(b_k^+)]$ , de tangentes faisant avec l'horizontale des angles inférieurs à  $\pi/4 + \beta_n$ , où  $\beta_n$  est une suite indépendante de  $k$  et tendant vers 0.
5. La courbe  $\mathcal{C}$  est injective.

**Preuve** : Les segments  $[b_k^-, a_k^-]$ ,  $[a_k^-, a_k^+]$  et  $[a_k^+, b_k^+]$  sont disjoints de  $U_{1,n}$ . Comme  $U_{1,n}$  est un piège pour  $H_n$ , son complémentaire dans  $\mathcal{L}_\varepsilon$  est un piège pour  $g$ , ce qui prouve le point 1.

Les  $V_{n,k}$  étant des pièges pour  $g$ , et toute portion  $g^m(\gamma_k^-)$  s'envoyant par un itéré de  $H_n$  sur  $[b_k^-, a^-, k] \subset V_{n,k}$ , on en déduit le point 2. Le point 3 est direct à partir de cela.

On démontre comme pour  $V_{n,k}$ , que la partie de  $\mathcal{L}_\varepsilon$  située entre les isoclines  $\pi/4 + k2\pi$  et  $-\pi/4 + k2\pi$  est un piège pour  $g$ .

Étant de diamètre (majoré par  $r^{q_n}$ ) négligeable devant le minorant  $\frac{\text{cste}}{q_n}$  de distance de  $b_k^-$  au bord de  $V_{n,k}$ , le segment  $\gamma_k^-$  a un diamètre hyperbolique dans  $V_{n,k}$  majoré par une suite dépendant de  $n$  et tendant vers 0. Donc les itérées  $g^m$  ont toutes sur  $\gamma_k^-$  une distortion arbitrairement faible quand  $n$  est suffisamment grand.

Cela implique dans un premier temps que pour  $n$  suffisamment grand,  $g(\gamma_k^- \setminus \{b_k^-\})$  est en dessous de l'isocline  $\pi/4 + k2\pi$ , car la pente des isoclines est  $< \alpha_1 = \arcsin(1/4)$  et  $\pi/4 + \alpha_1 < \pi/2$ , et au dessus de l'isocline  $-\pi/4 + k2\pi$ , car le majorant



du pas est négligeable devant le minorant de la distance séparant  $b_k^-$  de cette isocline. Donc tous les morceaux  $g^m(\gamma_k^-)$ ,  $m \geq 1$ , sont situés entre ces deux isoclines, donc les segments joignant leurs extrémités font un angle  $< \pi/4$  avec l'horizontale. On déduit alors le point 4 de la distortion arbitrairement petite.

Ainsi parties  $\mathcal{C}_- \cup [b_k^-, a_k^-]$  et  $\mathcal{C}_+ \cup [b_k^+, a_k^+]$  sont injectives. Pour prouver le point 5, il reste à montrer qu'elles ne se rencontrent pas (il est évident qu'elles sont disjointes de  $[a_k^-, a_k^+]$ ). Or elles sont piégées respectivement par  $U_{1,n,k}$  et  $U_{1,n,k+1}$  qui sont disjoints. ■

Tendant vers l'infini aux deux bouts, la courbe  $\mathcal{C}$  est une courbe de Jordan de  $\mathbb{S}^2$  adhérent à  $\infty$  : sont complémentaire dans  $\mathbb{C}$  a deux composantes connexes. L'une d'entre elle, que nous appellerons  $U_{\infty,n,k}$ , doit contenir  $U_{1,n,k}$ , puisque ce dernier est un connexe ne rencontrant pas  $\mathcal{C}$ .

Alors  $U_{\infty,n,k} \subset \mathcal{L}_\varepsilon$  : en effet, l'ouvert  $O = \text{Re}(z) > -\varepsilon$  est disjoint de la courbe de Jordan bordant  $U_{\infty,n,k}$  ; or le segment  $]a_k^-, a_k^+[$  a un voisinage à gauche inclus dans  $U_{1,n,k}$  et un voisinage à droite inclus dans  $O$  ; donc  $O$  et  $U_{1,n,k}$  sont dans deux composantes disjointes du complémentaire de  $\mathcal{C}$ .

Pour  $k \neq k'$ ,  $U_{\infty,n,k}$  et  $U_{\infty,n,k'}$  sont disjoints : en effet leurs bords dans  $\mathbb{C}$  sont disjoints et adhérent à  $O$ , ce qui fait que le bord chacun de ces ouverts est inclus dans l'extérieur de l'autre ouvert.

La courbe  $\mathcal{C}$  étant située entre les isoclines  $-\pi/2 + k2\pi$  et  $\pi/2 + (k+1)2\pi$ , on en déduit qu'il en est de même pour  $U_{\infty,n,k}$  (puisque'il ne contient pas  $O$ ).

Nous définissons l'ouvert  $U_{\infty,n} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{\infty,n,k}$ .

**Lemme 4.13** *Pour  $n$  suffisamment grand, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $U_{\infty,n,k}$  est un piège pour  $H_n$  et tout point de cet ouvert a la partie réelle de sont orbite qui tend vers  $-\infty$ .*

**Preuve** : L'image par  $H_n$  du bord de  $U_{\infty,n,k}$  est incluse dans l'adhérence de  $U_{\infty,n,k}$ ,  $U_{\infty,n,k}$  est stable par  $H_n$  puisque sont image contient  $H_n(U_{0,n,k}) \subset U_{0,n,k} \subset U_{\infty,n,k}$ . Cet ouvert est simplement connexe, et possède des points qui tendent vers  $-\infty$  : ce sont les points de  $U_{0,n,k}$ . C'est donc le cas pour tous ses points (car  $H_n$  contracte la métrique hyperbolique de  $U_{0,n,k}$ ). ■

### Majoration de l'aire des points s'échappant

Pour simplifier, nous noterons  $V$  pour  $V_{n,k}$ ,  $a_-$  pour  $a_k^-$ ,  $b_-$  pour  $b_k^-$ ,  $a_+$  pour  $a_{k-1}^+$ ,  $b_+$  pour  $b_{k-1}^+$ ,  $\gamma_-$  pour  $\gamma_k^-$  et  $\gamma_+$  pour  $\gamma_{k-1}^+$ . On définit  $w_m = g^m(b_-)$ . Tous ces points appartiennent à  $V$  ou au bord de  $V$ .

**Lemme 4.14** *La mesure de Lebesgue dans le quotient  $\mathcal{L}_\varepsilon/i2\pi\mathbb{Z}$  du complémentaire de  $U_{\infty,n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .*

**Preuve :** Rappelons-nous que  $H_n$  est injective sur  $\mathcal{L}_\varepsilon$ .

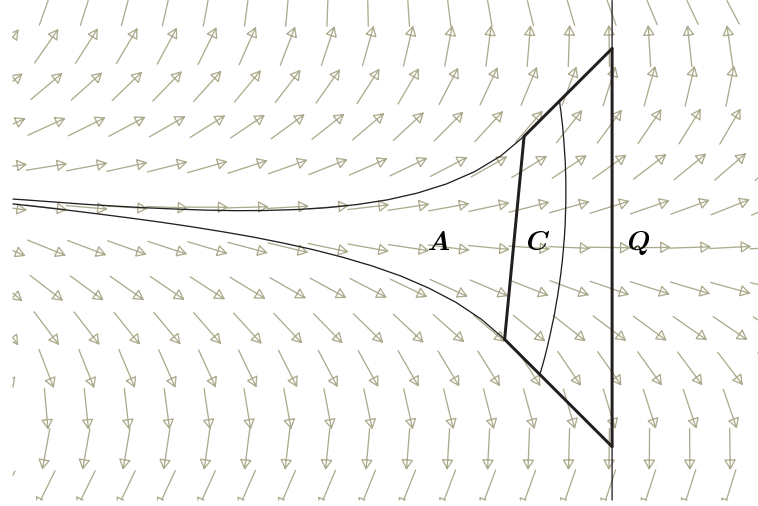


FIG. 4.3 – Le domaine  $R$

Prouvons que le complémentaire  $R$  dans  $\overline{V}$  de  $U_{\infty,n}$  est égal à la réunion du quadrilatère (fermé)  $Q$  de sommets  $(b_-, b_+, a_+, a_-)$  et des images  $g^m(C)$  pour  $m \geq 1$ , où  $C$  est la région fermée délimitée par la courbe de Jordan  $[H_n(b_-), b_-] \cup [b_-, b_+] \cup [b_+, H_n(b_+)] \cup H_n([b_+, b_-])$ .

– Prouvons d’abord que c’est bien une courbe de Jordan : l’injectivité sur la portion  $[H_n(b_-), b_-] \cup [b_-, b_+] \cup [b_+, H_n(b_+)]$  est due au lemme 4.9. L’injectivité sur la portion  $H_n([b_+, b_-])$  provient de l’injectivité de  $H_n$ . Enfin,  $H_n([b_+, b_-])$  est disjointe de  $[H_n(b_-), b_-] \cup [b_-, b_+] \cup [b_+, H_n(b_+)]$  car  $\text{Arg}(s_n(w)) \in ]-\pi/4, \pi/4[$  quand  $w \in ]b_-, b_+[$ .

– Soit la courbe de Jordan de  $\mathbb{S}^2$  :  $\mathcal{R} =$

$$\left( \bigcup_{m \geq 1} g^m(\gamma_-) \right) \cup [b_-, a_-] \cup [a_-, a_+] \cup [a_+, b_+] \left( \bigcup_{m \geq 1} g^m(\gamma_+) \right)$$

– Grâce au point 4 du lemme 4.12 et au lemme 4.9, on sait que pour  $n$  suffisamment grand la courbe  $\mathcal{R}$  ne rencontre pas  $]b_+, b_-[$ .

– Donc  $\overset{\circ}{Q}$  ne rencontre pas  $\mathcal{R}$ . Soit  $R'$  l’adhérence de la composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$  qui contient  $\overset{\circ}{Q}$  :  $Q \subset R'$ .

–  $R' \subset R$  : en effet, pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , l’ouvert  $\overset{\circ}{R}'$  est un connexe ne rencontrant pas le bord du domaine de Jordan  $U_{\infty,n,l}$ , donc il est soit inclus dans  $U_{\infty,n,l}$ , soit disjoint

de  $U_{\infty,n,l}$ . Or  $U_{\infty,n,l}$  est un piège et  $\overset{\circ}{Q}$  contient des points qui s'échappent de  $\mathcal{L}_\varepsilon$ , donc  $R'$  et  $U_{\infty,n,l}$  sont disjoints. Ceci étant vrai pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ , on a  $\overset{\circ}{R'} \subset R$ . Comme  $R$  est fermé et comme  $R' = \overline{\overset{\circ}{R'}}$ , on a  $R' \subset R$ .

–  $\partial R \subset \partial R'$  : en effet, le bord de  $R = V \setminus U_{\infty,n}$  est inclus dans  $\overline{V} \cap (\partial U_{\infty,n} \cup \partial V)$ . Les deux isoclines bordant  $V$  étant incluses dans  $U_{\infty,n}$ , on en déduit  $\partial R \subset \mathcal{R}$ .

– Donc  $R = R'$  (sinon,  $R$  devrait contenir tout le complémentaire du domaine de Jordan  $R'$ , donc serait égal à  $\mathbb{C}$ , ce qui est absurde).

–  $g(R) \subset R$  (donc  $H_n(R) \supset R$ ) : en effet,  $V_{n,k}$  est stable par  $g$ , et  $U_{\infty,n}$  est un piège pour  $H_n$ .

– Le domaine  $A = R \setminus Q$  a pour image  $A \cup C$  par  $H_n$  : en effet,  $A$  est délimité par la courbe de Jordan

$$\left( \bigcup_{m \geq 1} g^m(\gamma_k^-) \right) \cup [b_k^-, b_{k-1}^+] \cup \left( \bigcup_{m \geq 1} g^m(\gamma_{k-1}^+) \right)$$

qui a pour image par  $H_n$  la courbe de Jordan

$$\left( \bigcup_{m \geq 0} g^m(\gamma_k^-) \right) \cup H_n([b_k^-, b_{k-1}^+]) \cup \left( \bigcup_{m \geq 0} g^m(\gamma_{k-1}^+) \right)$$

qui est le bord du domaine de Jordan fermé  $A \cup C$ . Comme  $H_n(R) \supset R$ , et comme  $R$  possède des points de partie réelle arbitrairement petite, on en déduit que  $H_n(A) \cap A \neq \emptyset$ .

– Tout point  $w$  dans  $V$ , a une image située à droite de  $w$ , et (comme dans la preuve du lemme 4.5) l'orbite d'un point  $w$  de  $V$  doit sortir de  $V$ . Comme  $A \subset V$ , tout point  $w \in A$  a son orbite qui finit par sortir de  $A$ , donc tombe dans  $C$ . Cela prouve que

$$R = Q \cup \bigcup_{m \geq 1} g^m(C)$$

En adaptant le lemme 4.11 (en utilisant que le fait que le pas est de module négligeable devant  $1/q_n$ ), on montre que le diamètre hyperbolique de  $C$  dans  $V$  est universellement majoré pour  $n$  suffisamment grand, donc les  $g^m$  (définies et injectives sur  $V$ ) y sont à distortion bornée. Donc il existe une constante universelle  $K$  telle que

$$\text{Leb}(g^m(C)) \leq K \text{Leb}(C) \left| \frac{s_n(w_m)}{s_n(w_0)} \right|^2$$

Pour  $n$  suffisamment grand,

$$\text{Leb } C \leq 3|s_n(b_-)| |b_- - b_+|$$

(en effet,  $C$  est inclus dans le trapèze dont une des bases est  $[b_-, b_+]$ , de hauteur  $\max_{[b_-, b_+]} |s_n|$  négligeable devant la base, et dont les côtés sont à 45 degrés ; cette

hauteur est  $\leq \exp(\pi/6)|s_n(b_-)|$  pour  $n$  suffisamment grand : en effet pour tout  $w \in [b_-, b_+]$ ,  $|s_n(w)/s_n(b_-)| = |\exp(k_n(e^w) - k_n(e^{b_-}))|$ , et comme  $|w - b_-| \leq \frac{4\pi}{3q_n}$  (d'après les lemmes 4.8 et 4.9) et  $|k'_n/q_n| \leq 1/4$  sur  $r\mathbb{D}$ , on en déduit  $|k_n(e^w) - k_n(e^{b_-})|$  est majoré par  $\pi/3$ ; enfin  $\exp \frac{\pi}{3} < 3$  d'où l'affirmation).

Majorons l'aire de  $A \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'}$  où  $\varepsilon' (> \varepsilon)$  sera choisi plus tard.

$$\text{Leb}(A \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'}) \leq \frac{4K\pi}{q_n |s_n(w_0)|} \sum |s_n(w_m)|^2$$

la somme étant prise pour les  $m$  tels que  $g^m(C) \cap \mathcal{L}_\varepsilon \neq \emptyset$ . Notons que comme  $g$  envoie tout point de  $R$  sur un point de partie réelle inférieure, cette somme est la somme pour  $m \geq m_0$  où  $m_0$  est un certain entier.

Fixons  $0 < \eta < 1$ . Rappelons que  $s_n(w) = q_n w + k_n(e^w)$  et que  $\text{Re}(k_n/q_n) \rightarrow 0$  sur  $r\mathbb{D}$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Pour  $n$  suffisamment grand, on a donc pour tout  $w \in \mathcal{L}_\varepsilon$ ,  $(1 + \eta)q_n \text{Re}(w) \leq \ln |s_n(w)| \leq (1 - \eta)q_n \text{Re}(w)$ . On en déduit que

$$|s_n(w_0)| \geq \exp((1 + \eta)q_n \text{Re}(w_0))$$

$$|s_n(w_m)| \leq \exp((1 - \eta)q_n \text{Re}(w_m))$$

On a vu (lemme 4.12, point 4) que les courbes  $g^m(\gamma_\pm)$ ,  $m \geq 1$ , sont entre les isoclines  $-\pi/4 + k2\pi$  et  $\pi/4 + k2\pi$ . En particulier  $\text{Arg}(s_n(w_{m+1})) \in [-\pi/4, \pi/4]$ , ce qui implique

$$\text{Re}(w_{m+1}) + \sqrt{1/2} \exp((1 + \eta)q_n \text{Re}(w_{m+1})) \leq \text{Re}(w_m)$$

Introduisons

$$x_m = q_n \exp((1 + \eta)q_n \text{Re}(w_m))$$

On a  $x_m \in ]0, +\infty[$ , et

$$\phi(x_{m+1}) \leq x_m$$

où  $\phi(x) = x \exp(x(1 + \eta)\sqrt{1/2})$ . La fonction  $\phi$ , qui ne dépend que de  $\eta$ , est une bijection croissante de  $]0, +\infty[$  dans lui-même, et on a donc  $\forall m \geq m_0$ ,  $x_m \leq u_m$  où  $u_m$  est une suite définie pour  $m \geq m_0$  et telle que  $u_{m_0} = x_{m_0}$  et  $u_{m+1} = \phi^{-1}(u_m)$  (comme  $\phi(x) > x$ , on en déduit que  $u_m$  est strictement décroissante). On notera que  $u_{m_0}$  et  $x_0$  sont  $\leq q_n \exp(-(1 + \eta)q_n \varepsilon)$ , majorant qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

On a  $|s_n(w_0)| \geq x_0/q_n$  et  $\forall m \geq m_0$ ,

$$|s_n(w_m)| \leq \left(\frac{x_m}{q_n}\right)^{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \leq \left(\frac{u_m}{q_n}\right)^{\frac{1-\eta}{1+\eta}}$$

Ainsi

$$\text{Leb}(A \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'}) \leq \frac{4K\pi}{x_0 q_n^\alpha} \sum_{m \geq m_0} u_m^\alpha$$

Où  $\alpha = 2\frac{1-\eta}{1+\eta}$ . Or pour  $u_{m_0}$  suffisamment petit et pour une certaine constante  $K'$  (cela ne dépend que de  $\eta$ ), on a

$$\sum_{m \geq m_0} u_m^\alpha \leq K' u_{m_0}^{\alpha-1}$$

On calcule que  $\alpha - 1 = \frac{1-3\eta}{1+\eta}$ . On suppose dorénavant que  $\eta < 1/3$ .

Il reste à estimer  $u_{m_0}$  : comme  $g^{m_0}(C) \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'} \neq \emptyset$ , on en déduit que  $\operatorname{Re}(w_{m_0}) \leq -\varepsilon' + \operatorname{diam} g^{m_0}(C)$ . Soit  $w \in g^{m_0}(C) \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'}$  : par distortion bornée,

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} g^{m_0}(C) &\leq K'' \cdot \operatorname{diam}(C) \frac{|s_n(w)|}{|s_n(H_n^m(w))|} \\ &\leq \frac{K'''}{q_n} \cdot \exp\left(- (1-\eta)q_n\varepsilon' + (1+\eta)q_n\varepsilon\right) \end{aligned}$$

donc négligeable devant  $1/q_n$  pourvu que  $\varepsilon' > \frac{1+\eta}{1-\eta}\varepsilon$ . Ainsi

$$u_{m_0} \leq q_n \exp(-(1+\eta)q_n\varepsilon') \cdot v_n$$

où  $v_n \rightarrow 1$  est une suite qui ne dépend que de  $n$ .

En synthétisant tous ces résultats, on a pour  $n$  suffisamment grand,

$$\operatorname{Leb}(A \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'}) \leq K(\eta) \cdot q_n^{-2} \exp q_n \left( - (1+\eta) \operatorname{Re}(w_0) + (1-3\eta)\varepsilon' \right) \quad (4.3)$$

Une des conséquences du lemme 4.10 est que  $\operatorname{Re}(w_0) \rightarrow -\varepsilon$  indépendamment de  $k$ , quand  $n \rightarrow +\infty$  (rappelons que  $w_0$  désigne  $b_k^-$ ).

Donc d'une part, comme  $\operatorname{Re}(a_-) = -\varepsilon$ , et  $b_- = w_0$ , on a pour  $n$  suffisamment grand,  $\operatorname{Re}(w_0) > -\varepsilon'$  (pourvu que  $\varepsilon' > \varepsilon$ ), en particulier,  $Q \cap \mathcal{L}'_\varepsilon = \emptyset$ , donc  $R \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'} = A \cap \mathcal{L}_{\varepsilon'}$ .

D'autre part, si  $\varepsilon' > \frac{1+\eta}{1-3\eta}\varepsilon$ , alors pour  $n$  suffisamment grand,  $-(1+\eta) \operatorname{Re}(w_0) + (1-3\eta)\varepsilon' < 0$ .

Notons que la condition  $\varepsilon' > \frac{1+\eta}{1-3\eta}\varepsilon$  implique les conditions  $\varepsilon' > \frac{1+\eta}{1-\eta}\varepsilon$  et  $\varepsilon' > \varepsilon$  précédemment requises.

Sous ces conditions, la mesure du complémentaire de  $U_{\infty, n}$  dans le cylindre quotient de  $\mathcal{L}_{\varepsilon'}$  par  $i2\pi\mathbb{Z}$ , complémentaire qui est inclus dans la réunion des  $q_n$  régions  $V_{n, k}$ , est majorée par  $q_n$  fois le majorant de l'inégalité 4.3, et tend donc (exponentiellement) vers 0.

Quand à la partie située entre  $\operatorname{Re}(w) = -\varepsilon'$  et  $\operatorname{Re}(w) = -\varepsilon$ , sa mesure est inférieure à la mesure de cette partie, c'est à dire  $2\pi(\varepsilon' - \varepsilon)$ . Comme  $\eta$  peut-être pris arbitrairement proche de 0,  $\varepsilon'$  peut être pris arbitrairement proche de  $\varepsilon$ , on a prouvé le lemme 4.14.  $\blacksquare$

Quand on passe à l'exponentielle, dont la dérivée est de module inférieure à 1 sur le demi-plan " $\operatorname{Re}(w) < 0$ ", on obtient que la mesure du complémentaire dans  $r\mathbb{D}$  de

$\exp(U_{\infty,n})$  tend vers 0. Le réel  $r = e^{-\varepsilon}$  pouvant être choisi arbitrairement proche de 1, cela clôt la démonstration du lemme 4.3. Q.E.D.

Notons qu'on a démontré plus que nécessaire : en particulier non seulement l'aire du complémentaire du bassin de 0 dans  $\mathbb{D}$  tend vers 0 mais en plus son image en coordonnées logarithmiques dans  $\mathcal{L}_0/\mathbf{i}2\pi\mathbb{Z}$  a également une aire qui tend vers 0, quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Nous avons le bonus suivant :

**Lemme 4.15** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une suite  $D_n \rightarrow 0$  telle que chaque composante connexe du bassin de  $-\infty$  pour  $H_n$  sur  $\mathcal{L}_\varepsilon$  est inclus dans une bande de hauteur  $D_n$ .*

**Preuve** : Raffinons l'inégalité 4.1 : de  $l'_n(w) = q_n + e^w k'_n(e^w)$ , on déduit que pour tout  $w \in \mathcal{L}_\varepsilon$ ,  $|l'_n(w)/q_n - 1| \leq e^{\operatorname{Re}(w)} a_n$  où  $a_n \rightarrow 0$ . Cela implique que la variation de la hauteur d'une isocline est inférieure ou égale à  $b_n = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \arcsin(a_n e^x) dx$ . On calcule que  $b_n \sim a_n e^{-\varepsilon}$  donc qu'il tend vers 0. Nous affirmons que  $D_n = 3\pi/q_n + b_n$  convient. Il suffit pour cela de remarquer que les  $U_{\infty,n,k}$  sont dans des composantes distinctes du bassin, car alors toute composante est comprise entre un certain  $U_{\infty,n,k-1}$  et  $U_{\infty,n,k+1}$  si elle contient  $U_{\infty,n,k}$  et sinon entre un certain  $U_{\infty,n,k}$  et  $U_{\infty,n,k+1}$ . Or cette remarque est triviale puisque on a démontré que les  $U_{\infty,n,k}$  étaient des pièges disjoints. ■

Les hypothèses du lemme 4.3 sont insuffisantes pour assurer que  $D_n = O(1/q_n)$ . En effet, l'exemple  $k_n(z) = \sqrt{q_n} \frac{z-1}{z+1}$  donne pour l'isocline passant par  $w$  une différence de hauteur (entre  $w$  et  $-\infty$ ) égale à  $\frac{2}{\sqrt{q_n}} \operatorname{Im} \frac{1}{1+e^w}$ .

**Conjecture** *Dans le lemme 4.3, l'hypothèse de fuite des points fixes est superflue.*

Cette conjecture est motivée par le fait que les points fixes de  $G_n$  sont rares comparés à  $q_n$  (lemme 4.2). Cependant leur influence n'est pas forcément négligeable.

### 4.3 Applications à la famille quadratique

Nous allons démontrer le théorème 1, que nous divisons ici en deux parties.

Soit  $\theta \in \mathcal{S}$ ,  $\frac{p_n}{q_n}$  ses réduites et  $\lambda_n = \mathbf{i}2\pi \frac{p_n}{q_n}$ . Nous allons effectuer un changement de variable : soit  $G_n(z) = r(\theta)^{-1} F_{\lambda_n}^{q_n}(r(\theta)z)$  où  $F_\lambda = \Phi \circ P_\lambda \circ \Phi^{-1}$  et  $\Phi$  sont données par la proposition 3.4. Par définition,  $L_a(F_{\lambda_n}^{q_n}) = L_a(F_{\lambda_n})$ . D'après la proposition 1.3,

$L_a(F_{\lambda_n}^{q_n}) = r(\theta)L_a(G_n)$  et  $L_a(F_{\lambda_n}) = L_a(P_{\lambda_n})$ . Nous avons vu (théorème 3.1, équation 3.2) que  $L_a(P_{\lambda_n}) \rightarrow r(\theta)$ . Donc  $L_a(G_n) \rightarrow 1$ .

**Proposition 4.16** *Pour tout compact  $C \subset \Delta(\theta)$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ , l'itéré  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  n'a pas de point fixe différent de 0 dans  $C$ .*

**Preuve** : Idée de la preuve : il suffit de prouver pour tout  $r < 1$  que  $G_n$  n'a pas de point fixe non nul dans  $r\mathbb{D}$  pour  $n$  suffisamment grand. Nous appliquons d'une part le lemme 4.2 qui implique que le nombre de points fixes non nuls de  $G_n$  dans  $r\mathbb{D}$  est un  $o(q_n)$ , d'autre part la proposition 3.4 pour montrer que l'existence d'un point fixe non nul de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  dans  $C$  implique l'existence d'un nombre  $N$  de points fixes de  $G_n$  dans  $r\mathbb{D}$  tel que  $N \geq s.q_n$  pour un certain  $s \in ]0, 1]$  indépendant de  $n$  (mais dépendant de  $r$ ), en contradiction avec le lemme 4.2. Notons que la proposition 3.4 ne permet pas a priori de montrer dans tous les cas que  $N \geq q_n$ .

Détail : soit  $C' = \Phi(C) \subset r(\theta)\mathbb{D}$ , et  $C'' = \frac{1}{r(\theta)}C' \subset \mathbb{D}$ . Comme  $C'$  est compact, soit  $N_1$  la valeur de  $N$  correspondant à  $C'$  dans la proposition 3.4. Comme  $C''$  est un compact de  $\mathbb{D}$ ,  $C'' \subset r_0\mathbb{D}$  pour un certain  $r_0 \in ]0, 1[$ . Soit  $r_1 \in ]r_0, 1[$ . Reprenons l'estimation de la proposition 3.4 :

$$|F_{\lambda_n}^k(z) - e^{k\lambda_n}.z| \leq K|z|\frac{k}{q_n^2}$$

pour tout  $k \leq q_n$  et  $z \in C'$ . Soit  $N_2 \geq N_1$  tel que

$$\forall n \geq N_2, r_0 + \frac{K}{q_n r(\theta)} < r_1$$

Soit également  $s = \min(1, 1/K) \in ]0, 1]$ .

Maintenant, pour tout  $n \geq N_2$  et pour tout  $z \neq 0$  point de  $C$  qui est fixé par  $P_{\lambda_n}^{q_n}$ , soit  $u = \Phi(z)$ . Pour  $k < q_n$ , soit  $u_k = F_{\lambda_n}^k(u)$ , et  $v_k = u_k/r(\theta)$ . Alors d'après l'estimée,  $v_k \in r_1\mathbb{D}$ . De plus,  $v_k$  est un point fixe de  $G_n$ . De plus  $u_k$ , donc  $v_k$ , est non nul, car  $F_{\lambda_n}^{q_n-k}(u_k) = u \neq 0$ . Nous *affirmons* que les  $v_i$  pour  $i < s.q_n$ , sont deux à deux distincts, ce qui donne un nombre  $N_n(r_1)$  de point fixes non nuls de  $G_n$  dans  $r_1\mathbb{D}$  tel que  $N_n(r_1) \geq s.q_n$ .

Nous appliquerons alors le lemme 4.2 : le nombre de points fixes non nuls de  $G_n$  sur  $r_1\mathbb{D}$  est un  $o(q_n)$ . Soit donc  $N_3 \geq N_2$  tel que  $\forall n \geq N_3$ , ce nombre soit  $< s.q_n - 1$ . Alors  $\forall n \geq N_3$ ,  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  ne peut pas avoir de point fixe non nul dans  $C$ .

Démontrons l'affirmation : pour tout  $n$ , les  $q_n$  valeurs distinctes de  $e^{k\lambda_n}$  diffèrent d'au moins  $\frac{4}{q_n}$ . Pour  $i < s.q_n$ ,  $K\frac{i}{q_n^2} < \frac{1}{q_n}$ . Donc d'après l'inégalité triangulaire, pour  $k \neq k'$  strictement inférieurs à  $q_n$ ,

$$\begin{aligned} |u_k - u_{k'}| &\geq |e^{k\lambda_n}.u - e^{k'\lambda_n}.u| - |e^{k\lambda_n}.u - F_{\lambda_n}^k(u)| - |e^{k'\lambda_n}.u - F_{\lambda_n}^{k'}(u)| \\ &\geq \frac{4}{q_n}|u| - \frac{1}{q_n}|u| - \frac{1}{q_n}|u| = \frac{2|u|}{q_n} > 0 \end{aligned}$$

Ce qui clôt la démonstration. ■

**Proposition 4.17** *La mesure de l'ensemble (ouvert) des points  $z \in \Delta(\theta)$  dont l'orbite par  $P_{\lambda_n}$  ne sort pas de  $\Delta(\theta)$  et tend vers 0 sans tomber dessus, tend vers la mesure de  $\Delta(\theta)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .*

**Preuve** : Nous avons vu que  $L_a(G_n) \rightarrow 1$  et que les points fixes non nuls de  $G_n$  fuient tout compact. Nous pouvons donc appliquer le lemme 4.3 à la suite de fonctions  $G_n$ . Sa conclusion se transporte trivialement à  $F_{\lambda_n}^{q_n}$  : la mesure de l'ensemble des points de  $r(\theta)\mathbb{D}$  dont l'orbite future est infinie et tend vers 0 sans l'atteindre et sans sortir de  $\mathbb{D}$  tend vers la mesure de  $\mathbb{D}$ . En fait,  $F_{\lambda_n}$  est à valeurs dans  $r(\theta)\mathbb{D}$ , donc  $F_{\lambda_n}^{q_n}$  également, donc avoir une orbite infinie sous l'itération de  $F_{\lambda_n}^{q_n}$  qui ne sort pas de  $r(\theta)\mathbb{D}$  est équivalent à avoir une orbite infinie sous l'itération de  $F_{\lambda_n}^{q_n}$ , ce qui est bien sûr équivalent à avoir une orbite infinie sous l'itération de  $F_{\lambda_n}$ . D'autre part, que cette orbite tende vers 0 pour  $F_{\lambda_n}^{q_n}$  est équivalent à ce qu'elle tende vers 0 pour  $F_{\lambda_n}$ , car cette fonction est continue et fixe 0, et à  $n$  fixé il n'y a qu'un nombre fini d'itérations entre  $F_{\lambda_n}$  et  $F_{\lambda_n}^{q_n}$ . Ceci se transporte ensuite à  $P_{\lambda_n}|_{\Delta(\theta)}$  par l'isomorphisme  $\Phi$ . ■



## 5. Application à une nouvelle preuve d'un théorème de Yoccoz

Avant de rentrer dans le détail des preuves, donnons-en quelques idées directrices.

Dans le cas simple, l'idée est que lors du passage d'une bonne réduite à  $\theta$ , le cycle issu du point parabolique n'a pas le temps de s'éloigner de 0. Cette distance se majore ainsi : son logarithme est grossièrement majoré par  $-\frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$ . Plus précisément, le cycle est donné par une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{C}$  envoyant 0 sur 0, et que l'on évalue en un paramètre  $x$  correspondant à  $\theta$ , dont le module a pour logarithme approximativement  $-\frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$ . Si on sait que pour toutes les valeurs du paramètres dans  $\mathbb{D}$ , le cycle reste dans un certain domaine, alors on en déduit une certaine majoration de la distance à 0.

Dans le cas général, l'idée est que les cycles qui ont déjà explosé gênent les suivants. Donc l'effet des termes  $\frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$  se cumule. Plusieurs difficultés surgissent : les points gênants ne sont pas fixes mais dépendent du paramètre, et il faut majorer le rayon conforme du revêtement universel de leur complémentaire. On ne peut alors plus contrôler la distance à 0 de tout le cycle, mais uniquement le rayon conforme associé, c'est à dire la distance à 0 du point du cycle le plus proche.

### 5.1 Cas simple

**Théorème 5.1** *Soit  $\theta$  un nombre irrationnel et  $p_n/q_n$  ses réduites. Supposons que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} > 0$$

*Alors le polynôme quadratique  $P(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$  n'est pas linéarisable en 0. De plus, il possède des petits cycles (c'est-à-dire : pour tout voisinage  $B$  de 0, il existe un cycle de  $P$  complètement inclus dans  $B \setminus \{0\}$ ).*

**Preuve :** D'après l'hypothèse, il existe  $\eta > 0$  et un sous-ensemble infini  $J$  de  $\mathbb{N}$  tel que

$$\forall j \in J, \frac{\ln q_{j+1}}{q_j} \geq \eta$$

Supposons que  $P$  est linéarisable en 0. Soit  $\Delta$  le disque de Siegel de  $P$  en 0. Soit  $\Phi : \Delta(\theta) \rightarrow r(\theta)\mathbb{D}$  l'isomorphisme envoyant 0 sur 0 avec dérivée 1. Soient  $\Phi_\varepsilon$  les

fonctions de la section 3.1. Notons  $D = r(\theta)\mathbb{D}$  et  $D' = e^{-\eta/4}D \subset\subset D$ . D'après le théorème de Carathéodory,  $\Phi_\varepsilon^{-1}$  converge uniformément vers  $\Phi^{-1}$  sur  $D'$ . En particulier,  $\exists \varepsilon_1 > 0 \forall \varepsilon \leq \varepsilon_1, \Phi_\varepsilon^{-1}(D') \subset \Delta$ . Maintenant, puisque  $s_\varepsilon \rightarrow r(\theta)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, e^{-\eta/2}s_\varepsilon < e^{-\eta/4}r(\theta)$ . Soit  $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\delta_n \in \mathbb{C}$  l'un des  $q_n$  nombres complexes tels que

$$i2\pi\theta = i2\pi\frac{p_n}{q_n} + \delta_n^{q_n}$$

D'après une propriété bien connue des réduites

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

D'où

$$|\delta_n| < \left( \frac{2\pi}{q_n q_{n+1}} \right)^{1/q_n}$$

$$\ln |\delta_n| < \frac{2\pi}{q_n} - \frac{\ln q_n}{q_n} - \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$$

Soit  $R_q$  la suite introduite au théorème 2.3 et  $K > 0$  telle que  $\forall q, R_q \geq K/q^3$ . Alors pour tout  $j \in J$ ,

$$\ln \frac{|\delta_j|}{R_{q_j}^{1/q_j}} < \frac{\ln(2\pi) + 2 \ln(q_j) - \ln(K)}{q_j} - \eta \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} -\eta$$

Ainsi il existe  $j_0 \in J$  tel que  $\forall j \in J$  et  $\geq j_0, \delta_j \in e^{-\eta/2}R_{q_j}^{1/q_j}\mathbb{D}$ . Rappelons que les fonctions  $\Phi_{p/q, \varepsilon}$  de la section 3.1 sont définies pour  $p/q$  suffisamment proche de  $\theta$  et vont de  $R_q^{1/q}\mathbb{D}$  dans  $s_\varepsilon\mathbb{D}$ . Notons  $j_1(\varepsilon) \in J$  tel que  $\forall \varepsilon' > 0$  et  $\forall j \geq j_1(\varepsilon'), \Phi_{p_j/q_j, \varepsilon'}$  est définie. D'après l'inégalité de Schwarz, quand  $j \geq \max(j_0, j_1(\varepsilon))$  et  $j \in J$ , alors  $\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{p_j/q_j, \varepsilon}(\delta_j) \in e^{-\eta/2}s_\varepsilon\mathbb{D} \subset D'$ , donc  $z \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{p_j/q_j}(\delta_j) = \Phi_\varepsilon^{-1}(\zeta) \in \Delta(\theta)$ . Or  $z$  est un point périodique de  $P$ , donc ne peut pas appartenir à  $\Delta(\theta)$ . C'est une contradiction.

Nous savons donc que 0 est un point de Crémer de  $P$ . Donc  $r(\theta) = 0$ . Prouvons maintenant que  $P$  a des petits cycles. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , notons  $j(\varepsilon) = \max(j_0, j_1(\varepsilon))$ . Soit  $z_k(\varepsilon) = \chi_{p_j(\varepsilon)/q_j(\varepsilon)}(o^k \delta_{j(\varepsilon)})$  et  $\zeta_k(\varepsilon) = \Phi_\varepsilon(z_k(\varepsilon))$ , où  $o = e^{i2\pi p_j(\varepsilon)/q_j(\varepsilon)}$ , et  $k = 0, \dots, q_j(\varepsilon) - 1$ . Les points  $z_k$  forment un cycle de  $P$ . Comme précédemment, les points  $\zeta_k$  vérifient  $|\zeta_k|/s_\varepsilon < e^{-\eta/2}$  par l'inégalité de Schwarz. Or d'après le théorème de Carathéodory, la suite de fonctions  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \Phi_\varepsilon^{-1}(s_\varepsilon z)$  tend uniformément vers 0 sur  $e^{-\eta/2}\mathbb{D}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Cela prouve que le cycle des  $z_k(\varepsilon)$  tend uniformément vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

## 5.2 Cas général

**Théorème 5.2** *Soit  $\theta$  un nombre irrationnel et  $p_n/q_n$  ses réduites. Supposons que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$$

*Alors le polynôme quadratique  $P(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$  n'est pas linéarisable en 0.*

Le reste de cette section est dédié à la preuve de ce théorème.

### Lemmes préliminaires

Nous noterons  $d_{\mathbb{D}}(z, z')$  la distance entre  $z$  et  $z'$ , pour la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{D}$  :  $d_{\mathbb{D}}(0, z) = \tanh^{-1} |z|$ .

Soit  $V$  un ouvert connexe non vide de  $\mathbb{C}$  et  $z_0$  un point de  $V$ . Soit  $\tilde{V} \xrightarrow{p} V$  son revêtement universel abstrait. Il existe une unique valeur de  $r \in ]0, +\infty]$  telle qu'il existe un isomorphisme  $\psi : r\mathbb{D} \rightarrow \tilde{V}$  tel que  $p \circ \psi$  envoie 0 sur  $z_0$  avec dérivée 1. Nous appellerons  $r$  le *rayon conforme du revêtement universel* (r.c.r.u.) en  $z_0$  de  $V$ . Si  $r < +\infty$ , on notera  $\phi_V : \mathbb{D} \rightarrow V$  définie par  $\phi_V(z) = p \circ \psi(rz)$  (le point  $z_0$  est sous entendu, dans la suite il sera systématiquement égal à 0) :  $\phi'_V(0) = r$ . La fonction  $\psi$  dépend du choix d'un relevé de  $z_0$  dans  $\tilde{V}$ , mais la fonction  $\phi_V$  est indépendante des choix.

### Un revêtement universel

**Lemme 5.3** *Soit  $p \in ]0, 1[$  et  $V = \mathbb{D} \setminus \{p\}$ . Alors*

$$- \phi_V = s \mapsto w \text{ où } w = \frac{v+p}{1+pv}, v = -e^u, u = -\ln(p)t, t = \frac{s+1}{s-1} \text{ et } s \in \mathbb{D}.$$

*- pour tout  $r_0 < p$ , et pour tout point  $s \in \mathbb{D}$ , soit  $w = \phi_V(s)$  : si  $d_{\mathbb{D}}(w, p) \leq d_{\mathbb{D}}(0, r_0)$ , alors  $|s| \geq s_0$  où  $s_0$  correspond à  $u_0 = \ln r_0$ .*

On calcule

$$s_0 = \frac{t_0 + 1}{t_0 - 1} = 1 - \frac{2}{1 - t_0} \text{ où } t_0 = -\frac{\ln r_0}{\ln p} (< -1)$$

donc

$$s_0 = 1 - \frac{2}{1 + \frac{\ln r_0}{\ln p}} \in ]0, 1[$$

Note : le rayon conforme du revêtement universel de  $V$  en 0 vaut

$$\phi'_V(0) = \frac{2p|\ln p|}{1-p^2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{\varepsilon^2}{6} + O(\varepsilon^3)$$

où  $\varepsilon = 1 - p$ .

### Un phénomène de cage de Faraday

Soit une courbe de Jordan  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}$  délimitant un ouvert  $U$ ,  $z$  un point de  $U$ , et  $u_1, \dots, u_n$  une discrétisation de cette courbe. Si les points  $z_i$  sont suffisamment serrés, le revêtement universel de la sphère de Riemann privé des  $z_i$  aura un rayon conforme en  $z$  (défini de manière analogue au cas des ouverts de  $\mathbb{C}$ ) proche du rayon conforme interne  $r_U$  en  $z$  de  $U$ . Supposons maintenant que  $r \in ]0, 1[$ , et que  $0 \in U \subset r\mathbb{D} \subset \mathbb{D}$ . Alors  $r_U < r < 1$ . Considérons  $r'$  le rayon conforme en  $0$  du revêtement universel de  $V = \mathbb{D} \setminus \{u_1, \dots, u_n\}$ . Il est évident que  $r_U < r' < 1$ . On cherche une condition pour que  $r'$  ne soit pas sensiblement plus proche de 1 que  $r$  n'est proche de 1. Pour cela il vaut mieux énoncer les choses en terme de logarithmes :  $-\ln(r_U) > -\ln(r) > 0$  et  $-\ln(r_U) > -\ln(r') > 0$ . On cherche donc une condition pour que  $|\ln(r')|/|\ln(r)| > \varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  est un réel fixé à l'avance (pas trop grand).

Nous conjecturons que pour tout réel  $d > 0$ , pourvu que  $r$  soit supérieur à une constante  $r_d < 1$ , la condition " $\forall i, d_{\mathbb{D}}(z_i, z_{i+1}) < d$ " (où  $z_n = z_0$ ) suffit pour une certaine valeur  $\varepsilon_d$  de  $\varepsilon$ . De plus il est raisonnable de penser que  $\varepsilon_d \rightarrow 1$  quand  $d \rightarrow 0$ .

Le lemme suivant est une version faible de cette conjecture. Il n'est pas optimisé.

**Lemme 5.4** *Soient  $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{D}$  non nuls. Soit  $V = \mathbb{D} \setminus \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ . Supposons qu'il existe  $r \in ]0, 1[$ , un réel  $d > 0$ , et des chemins  $\gamma_i$  reliant  $z_i$  à  $z_{i+1}$ , tels que :*

- $r_0 = \tanh(d/2) < r$
- la longueur hyperbolique de  $\gamma_i$  est  $\leq d$
- $\gamma_i$  est inclus dans  $r\overline{\mathbb{D}}$  et évite 0
- la réunion  $\gamma$  des supports des  $\gamma_i$  sépare 0 de  $\partial\mathbb{D}$

Alors

$$|\phi'_V(0)| \leq \frac{r}{s_0}$$

avec

$$s_0 = 1 - \frac{2}{1 + \frac{\ln r_0}{\ln r}} \in ]0, 1[$$

**Preuve :** Soit  $U$  la composante connexe contenant 0 de  $\mathbb{D} \setminus \gamma$  : comme  $\gamma$  est connexe et qu'il sépare 0 de  $\partial\mathbb{D}$ ,  $U$  est simplement connexe. Notons que  $U \subset r\mathbb{D}$ . Pour tout  $i$ , la fonction  $\phi_V$  se factorise par le revêtement universel de  $V_i = \mathbb{D} \setminus \{z_i\}$  :  $\phi_V = \phi_{V_i} \circ h_i$  où  $h_i : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est holomorphe et fixe 0 (théorème de relèvement).

Tout point  $z$  du bord de  $U$  appartient à  $\gamma$ , donc est à distance hyperbolique inférieure ou égale à  $d_0/2$  d'un certain  $z_i$ . Si  $z \neq z_i$ , soit  $a$  une préimage de  $z$  par  $\phi_V$ , et  $b =$

$h_i(a)$  : alors  $z = \phi_{V_i}(b)$ . D'après l'inégalité de Schwarz,  $|a| \geq |b|$ . D'après le lemme précédent,  $|b| \geq s_0$  où  $s_0$  est associé à  $r_0$ . Donc  $|a| > s_0$ . Donc  $\Phi_V^{-1}(\partial U) \cap s_0\mathbb{D} = \emptyset$ . On en déduit que  $\Phi_V^{-1}(U) \supset s_0\mathbb{D}$  (puisqu'il contient 0). Donc  $\Phi_V$  envoie  $s_0\mathbb{D}$  dans  $r\mathbb{D}$  (et 0 sur 0). Donc d'après l'inégalité de Schwarz,

$$|\Phi'_V(0)| \leq \frac{r}{s_0}$$

■

Sans l'hypothèse demandant que 0 soit entouré, le lemme devient faux : si les  $z_i$  sont presque confondus et à distance  $r$  de 0, le revêtement universel est très proche de celui du lemme 5.3, pour lequel  $|\ln(r')|$  est de l'ordre de  $|\ln(r)|^2$  quand  $r \rightarrow 1$ , donc  $|\ln(r')|/|\ln(r)| \rightarrow 0$ .

À  $r$  fixé, le lemme suivant a de l'intérêt quand  $q$  est suffisamment grand. Nous noterons  $\mathbb{U}_q$  l'ensemble des racines  $q$ -ièmes de l'unité.

**Lemme 5.5** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe telle que  $f(0) = 0$ . Soit  $q \geq 3$  et  $r \in ]0, 1[$ . Soit  $V = \mathbb{D} \setminus f(r\mathbb{U}_q)$ . Soit  $\zeta = e^{i2\pi\frac{1}{q}}$  et  $d_0 = d_{\mathbb{D}}(r, r\zeta)$ . Supposons que  $0 \in V$ . Alors*

$$|\phi'_V(0)| \leq \frac{r}{s_0}$$

avec

$$s_0 = 1 - \frac{2}{1 + \frac{\ln r_0}{\ln r}} \quad \text{et} \quad r_0 = \tanh(d_0/2)$$

**Preuve** : Notons que l'inégalité  $\tanh(d_0/2) < r$  est automatiquement vérifiée : en effet, considérons le triangle hyperbolique rectangle de  $\mathbb{D}$  dont les sommets sont 0,  $r$  et le milieu  $m$  du segment hyperbolique  $[r, r\zeta]_{\mathbb{D}}$ . Comme  $q \neq 2$ , ce milieu est distinct de 0. La longueur hyperbolique  $\tanh^{-1} r$  de l'hypoténuse  $[0, r]_{\mathbb{D}}$  est supérieure à celle de chaque côté, donc à celle du côté  $[r, m]_{\mathbb{D}}$ , qui vaut exactement  $d_0/2$ .

Soit  $w_i = r\zeta^i$  et  $z_i = f(w_i)$ . D'après l'inégalité de Schwarz,  $|z_i| \leq r$ . Considérons l'arc de géodésique reliant  $z_i$  à  $z_{i+1}$ . Sa longueur hyperbolique est égale à  $d_0$ . Son image par  $f$  est un chemin  $\gamma_i$  reliant  $z_i$  à  $z_{i+1}$ , et sa longueur est inférieure ou égale à  $d_0$  car  $f$  est contractante au sens large pour la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{D}$ . La concaténation de ces arcs est un chemin  $\gamma$  dans  $\mathbb{D}$ . L'inégalité de Schwarz implique que  $\gamma = f(r\partial\mathbb{D}) \subset r\overline{\mathbb{D}}$ .

Supposons que  $\gamma$  ne passe pas par 0. Alors  $\gamma$  sépare 0 de  $\partial\mathbb{D}$  : en effet le nombre de tours que  $\gamma$  fait par rapport à 0 est égal au nombre de fois compté avec multiplicité que  $f$  atteint 0 dans  $r\mathbb{D}$ , donc est strictement positif. Donc on peut appliquer le lemme 5.4.

Maintenant si  $\gamma$  passe par 0, il suffit de perturber légèrement les courbes choisies.

■

A nouveau, nous n'avons pas cherché à optimiser l'énoncé suivant.

**Corollaire 5.6** *Reprenons les notations du lemme précédent et soient  $\varepsilon = -\ln r$ ,  $r' = |\phi'_V(0)|$  et  $\varepsilon' = -\ln r'$ . Si on fait les hypothèses suivantes :  $r \geq e^{-1}$  (i.e.  $\varepsilon \leq 1$ ), et  $q\varepsilon \geq 400$  (ce qui implique automatiquement que  $q \geq 3$ ), alors  $-\ln r_0 \geq 4$  et*

$$\varepsilon' \geq (1 - \ln(2))\varepsilon$$

**Preuve** : En effet, une fois que l'on sait que  $-\ln r_0 \geq 4$ , alors, en appliquant le lemme précédent,  $r' \leq r/s_0$ , donc  $\ln r' \leq \ln r - \ln s_0$ , donc

$$\varepsilon' \geq \varepsilon + \ln(s_0)$$

Or

$$s_0 = 1 - \frac{2}{1 + \ln(r_0)/\ln(r)} = 1 - 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon + |\ln r_0|} \geq 1 - \varepsilon\frac{2}{|\ln r_0|} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc

$$\ln s_0 \geq \ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq -\ln(2)\varepsilon$$

Cette dernière inégalité provenant du fait que  $\varepsilon/2 \in ]0, 1/2[$  et que le graphe de  $x \mapsto \ln(1-x)$  est au dessus de ses corde, appliqué à la corde au dessus de  $[0, 1/2]$  :  $\forall x \in [0, 1/2], \ln(1-x) \geq -2\ln(2)x$ .

Prouvons maintenant que  $-\ln r_0 \geq 4$ . Cela équivaut à  $r_0 \leq e^{-4}$ . Soit  $r_1 = \tanh(d_0)$ . Rappelons que  $r_0 = \tanh(d_0/2)$  et que  $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh(x)^2}$ . Donc  $r_0 \leq e^{-4} \iff r_1 \leq \frac{2e^{-4}}{1 + e^{-8}}$ . Nous noterons  $K_0$  cette dernière constante.

$$r_1 = \left| \frac{r\zeta - r}{1 - r.r\zeta} \right| = r \left| \frac{1 - \zeta}{1 - r^2\zeta} \right|$$

Or  $|1 - \zeta| \leq \frac{2\pi}{q}$ ,  $r \leq 1$  et  $|1 - r^2\zeta| \geq |1 - r^2| \geq \frac{1 - e^{-2}}{2}\varepsilon$ . D'où

$$r_1 \leq \frac{4\pi}{(1 - e^{-2})q\varepsilon}$$

Donc dès que  $q\varepsilon \geq K_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\pi}{(1 - e^{-2})K_0} = \frac{2\pi(e^4 + e^{-4})}{1 - e^{-2}}$ , alors  $r_1 \leq K_0$  donc  $-\ln(r_0) \geq 4$ . On calcule (arrondi par défaut)  $K_0 = 396,87\dots$ . Donc  $K < 400$ . ■

*Note* : En étudiant plus finement les inégalités, et quitte à éventuellement imposer  $r$  plus proche de 1, et à remplacer la constante  $(1 - \ln(2))$  par une constante moins bonne (i.e. plus petite), on peut abaisser le seuil  $q\varepsilon \geq 400$  à une valeur arbitrairement proche de  $\pi\sqrt{\cosh(2)^2 - 1} = 11,39\dots$  (correspondant à  $-\ln(r_0) = 2$ , i.e.  $d_0 = 2 \tanh^{-1}(e^{-2}) = 0,27\dots$ ), mais on ne pourra pas le faire descendre en deçà. La méthode utilisée dans le lemme 5.5 est donc loin de l'optimum, puisque nous conjecturons que l'on peut abaisser arbitrairement  $q\varepsilon$ , i.e. que l'on peut prendre  $d_0$  arbitrairement grand. Voir l'appendice où nous donnons des exemples qui nous font penser qu'une telle conjecture peut être vraie.

*Note* : considérons l'arc de cercle de centre 0 et reliant  $w_i$  à  $w_{i+1}$ . Sa longueur hyperbolique est exactement

$$l_0 = \frac{2\pi r}{q(1-r^2)}$$

Notons qu'elle ne diffère pas beaucoup de la distance hyperbolique de  $w_i$  à  $w_{i+1}$  si cette dernière est petite, et qu'elle est nettement plus grande si cette dernière est grande.

### *Un lemme d'uniformisation avec paramètre*

Supposons que  $V_t$  soit le complémentaire dans un ouvert  $U$  de  $n$  points distincts et distincts de 0 qui dépendent analytiquement du paramètre  $t$ , et que 0 est un point de  $U$ . Alors, pour tout  $t$ , la fonction  $\phi_{V_t}$  est un choix canonique de revêtement universel de  $V_t$ . Malheureusement, en général  $\phi_{V_t}$  ne dépend pas analytiquement du paramètre. Or la famille des revêtements universels abstraits  $\tilde{V}_t$  a une structure naturelle de variété analytique. Si on veut une représentation de cette famille respectant cette structure, il faut sacrifier la propriété de partir d'un ouvert ne dépendant pas de  $t$  (en l'occurrence  $\mathbb{D}$ ). Quand les points bougent peu, on espère que cet ouvert bougera peu lui-même.

Grâce aux théorèmes de Slodkowski et d'Ahlfors-Bers, on arrive dans certains cas à construire une famille dont on maîtrise dans une certaine mesure les variations. Comme précédemment, le lemme suivant n'est pas optimal.

**Lemme 5.7** *Soit  $z_i(t) \in \mathbb{D}$ ,  $i = 1, \dots, q$ ,  $t \in \mathbb{D}$ ,  $q$  fonctions holomorphes telles que pour tout  $t \in \mathbb{D}$ , et  $i \neq j$ ,  $z_i(t) \neq z_j(t)$ , et pour tout  $i$ ,  $z_i(t) \neq 0$ . Pour  $t \in \mathbb{D}$ , posons  $V_t = \mathbb{D} \setminus \{z_1(t), \dots, z_q(t)\}$ .*

*Alors il existe un ouvert connexe  $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^2$  et une fonction analytique  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  tels que*

1. *Soit  $\Phi(z, t) = (\phi(z, t), t) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^2$ . Alors  $\Phi$  est un difféomorphisme analytique local.*
2. *Soit  $\mathcal{U}_t = \{z \in \mathbb{C} \mid (z, t) \in \mathcal{U}\}$  et  $\phi_t(z) = \phi(z, t)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{D}$ ,  $\phi_t : \mathcal{U}_t \rightarrow V_t$  est un revêtement universel, et  $\phi_t(0) = 0$ .*
3. *Pour  $t = 0$ ,  $\mathcal{U}_0 = \mathbb{D}$ .*
4. *Il existe un mouvement holomorphe (en la seconde variable)  $\eta : \mathbb{C} \times \mathbb{D}$ , tel que pour tout  $t \in \mathbb{D}$ , la fonction  $\eta_t : z \mapsto \eta(z, t)$  est analytique en dehors de  $\overline{\mathbb{D}}$ , et envoie  $\mathbb{D}$  sur  $\mathcal{U}_t$ .*
5. *Pour tout  $t \in \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{U}_t \subset (1 + 5|t|)\mathbb{D}$ .*

**Preuve** : D'après le théorème de Slodkowski, le mouvement holomorphe  $\xi_t$  défini sur  $C = \partial\mathbb{D} \cup \{z_1(0), \dots, z_q(0)\} \cup \{0\}$  par  $\xi_t(z_i(0)) = z_i(t)$  et par  $\xi_t(z) = z$  pour  $z \in \partial\mathbb{D} \cup \{0\}$  se prolonge en un mouvement holomorphe de tout  $\mathbb{S}^2$ . Considérons

le champ d'ellipses  $\mu_t$  défini sur  $V_0$  comme le pull-back par  $\xi_t$  du champ nul sur  $V_t$ . Il dépend de manière holomorphe de  $t$ . Soit  $\nu_t$  le pull-back de  $\mu_t$  par  $\phi_{V_0}$ . Nous prolongeons  $\nu_t$  à toute la sphère de Riemann par 0 en dehors de  $\mathbb{D}$ . Ce champ d'ellipses dépend de façon holomorphe de sa variable. Soit  $\eta_t$  le redressement de ce champ d'ellipses, normalisé par les conditions suivantes :  $\eta(0) = 0$ ,  $\eta(\infty) = \infty$ ,  $\eta'(\infty) = 1$ . Alors  $\eta_t$  est un mouvement holomorphe de  $\mathbb{C}$ , paramétré par  $\mathbb{D}$ . Soit  $\mathcal{U} = \{(z, t) \mid z \in \eta_t(\mathbb{D})\}$ . La fonction  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\phi(z, t) = \xi_t \circ \phi_{V_0} \circ \eta_t^{-1}(z)$  répond aux points 1 à 4 du cahier des charges : les points 2 à 4 sont immédiats, ainsi que l'injectivité locale de l'application  $\Phi$  du point 1 ; l'analyticité de  $\Phi$  est une conséquence du lemme 5.8 appliqué aux familles suivantes de surfaces de Riemann : les horizontales " $t = \text{cste}$ " et les courbes  $\mathcal{C}_z$  paramétrées par  $t \mapsto (\eta_t(z), t)$ . Vérifions le dernier point : comme  $\eta_t$  est analytique en dehors de  $\overline{\mathbb{D}}$ , on déduit du théorème de Koebe que  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $|\eta_t(z)| \leq 4$ . Comme  $\eta_0(z) = z$ , on en déduit que  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $|\eta_t(z) - z| \leq 5|t|$ , d'où  $\eta_t(\mathbb{D}) \subset (1 + 5|t|)\mathbb{D}$  (ces estimations ne sont pas optimales). ■

Nous avons dans cette preuve utilisé le lemme suivant :

**Lemme 5.8** *Si une application continue d'un ouvert de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}$  est  $\mathbb{C}$ -différentiable le long de deux familles transverses de foliations par des surfaces de Riemann, alors elle est analytique.*

Pour une preuve de ce dernier, voir l'appendice de Tan Lei dans l'article [S], pp. 360 à 362. La preuve du point 1 du lemme 5.7 en est également inspiré.

*Bonnes réduites*

Soit  $R_q \sim \frac{C_0}{q^3}$  la suite du théorème 2.3. Soient  $C_1 > C_2 > 0$  telles que  $\forall q \geq 1$ ,  $\frac{C_2}{q^3} \leq R_q \leq \frac{C_1}{q^3}$ . Soit

$$B_n = B\left(\mathbf{i}2\pi\frac{p_n}{q_n}, R_{q_n}\right)$$

Nous utiliserons les propriétés suivantes des réduites : la suite  $d_n = \left|\frac{p_n}{q_n} - \theta\right|$  est décroissante,  $q_n q_{n+1} d_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , et  $\forall m < n$ ,  $\left|\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{d_m}{2}$

**Lemme 5.9** *Soit  $\theta$  tel que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$ . Alors il existe une suite strictement croissante d'entiers  $n_k \in \mathbb{N}$ , dont l'ensemble sera noté  $\mathcal{K}$ , telle que*

$$1. \sum_{n \in \mathcal{K}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$$



$$2. \ln q_n \underset{n \xrightarrow{\in \mathcal{K}} +\infty}{=} o(\ln q_{n+1})$$

$$3. \forall n \in \mathcal{K}, i2\pi\theta \in B_n$$

$$4. \forall m, n \in \mathcal{K}, m < n \Rightarrow B_n \subset B_m \text{ et } \text{centre}(B_m) \notin B_n$$

**Preuve :** Soit  $F_n$  le  $n$ -ième nombre de Fibonacci ( $F_0 = 0, F_1 = 1$ ). Pour tout  $C > 0$ , considérons la contribution des termes des rangs  $n \geq 2$  pour lesquels  $\ln q_{n+1} \leq C \ln q_n$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq 2 \\ \ln q_{n+1} \leq C \ln q_n}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} &\leq C \cdot \sum_{n \geq 2} \frac{\ln q_n}{q_n} \\ &\leq C \cdot \sum_{k \geq 4} \frac{\ln F_k}{F_k} = C \cdot A < +\infty \end{aligned}$$

car  $q_n \geq F_{n+2}$ , et la fonction  $\ln(x)/x$  est décroissante sur  $[3, +\infty[$  et  $F_4 = 3$ .

On en déduit l'existence d'une sous-suite vérifiant les points 1 et 2. Le point 2 s'énonce de façon équivalente par  $\forall l > 0, 1/q_{n+1} = o(1/q_n^l)$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $\mathcal{K}$ . C'est en particulier vrai pour  $l = 2$ , ce qui permet de démontrer les points 3 et 4 :

Notons  $c_n$  le centre de  $B_n$ . D'après les propriétés des réduites, la distance  $|c_n - i2\pi\theta| = 2\pi d_n$  est de l'ordre de  $1/q_n q_{n+1}$  donc (comme  $1/q_{n+1} = o(1/q_n^2)$ )

$$d_n = o(R_{q_n})$$

(quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $\mathcal{K}$ ), donc  $i2\pi\theta \in B_n$  pour  $n$  suffisamment grand dans  $\mathcal{K}$ . Pour tout  $m$  dans  $\mathcal{K}$ , et pour tout  $n > m$ ,  $B_n \subset B(c_m, R_{q_n} + |c_n - c_m|)$  et

$$R_{q_n} + |c_n - c_m| \leq R_{q_{m+1}} + 2\pi d_n + 2\pi d_m \leq R_{q_{m+1}} + 4\pi d_m = o(R_{q_m})$$

donc  $B_n \subset B_m$  dès que  $m \in \mathcal{K}$  est assez grand, indépendamment de  $n$ . Enfin,  $R_{q_{m+1}} = o(d_m)$  et d'après les propriétés des réduites,  $|c_n - c_m| \geq \pi d_m$ , donc

$$R_{q_n} \leq R_{q_{m+1}} = o(|c_n - c_m|)$$

donc pour tout  $m \in \mathcal{K}$  suffisamment grand, et pour tout  $n \geq m$ , le centre de  $B_m$  n'est pas dans  $B_n$  (notons qu'on n'a pas besoin de l'hypothèse  $n \in \mathcal{K}$ ). Il suffit donc de restreindre  $\mathcal{K}$  à ses éléments supérieurs à une certaine constante. ■

Nous nous plaçons dorénavant dans le cadre du lemme précédent.

### Les variables $\delta_n$ et leurs relations

L'explosion des cycles n'est pas décrite en termes de  $\lambda$  (dans  $e^\lambda z + z^2$ ), mais en termes d'une racine  $q$ -ième. Nous appellerons donc  $\delta_n$  une variable, correspondant à  $\lambda$  par :

$$\lambda = \mathbf{i}2\pi \frac{p_n}{q_n} + \delta_n^{q_n}$$

Le domaine de variation de  $\delta_n$  correspondant à  $\lambda \in B_n$  est le disque  $R'_n \mathbb{D}$  où  $R'_n = R_{q_n}^{1/q_n}$ . Pour tout  $n \in \mathcal{K}$ , le paramètre  $\lambda_\theta = \mathbf{i}2\pi\theta$  appartient à  $B_n \setminus \{c_n\}$ , donc il existe exactement  $q_n$  valeurs de  $\delta_n \in \mathbb{D}$  correspondant à  $\lambda_\theta$ . Nous en choisissons une, que nous noterons  $\delta_n^*$ . Pour  $m < n$  deux éléments de  $\mathcal{K}$ , nous définissons  $\tau_{m \leftarrow n} : \delta_n \mapsto \delta_m$  par l'intermédiaire de la coordonnée  $\lambda$  : la fonction  $\tau_{m \leftarrow n}$  est la composée de  $\delta_n \mapsto \lambda$  avec la branche de l'inverse sur  $B_m$  de  $\delta_m \mapsto \lambda$  qui envoie  $\lambda_\theta$  sur  $\delta_m^*$  (cette branche existe car la valeur critique  $c_m$  de  $\delta_m \mapsto \lambda$  n'appartient pas à  $B_n$ ). La fonction  $\tau_{m \leftarrow n}$  est définie sur  $R'_n \mathbb{D}$  et est à valeur dans  $R'_m \mathbb{D} \setminus \{0\}$  puisque  $B_n \subset B_m \setminus \{c_m\}$ .

Nous allons normaliser les  $\delta_n$  pour que leur domaine de variation soit le disque unité : soit

$$\delta_n = \delta_n / R'_n$$

Soit  $\tau_{m \leftarrow n} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  les changements de variable correspondants :  $\tau_{m \leftarrow n}(\delta_n) = \tau_{m \leftarrow n}(R'_n \delta_n) / R'_m$ . Soit  $\delta_n^* = \delta_n^* / R'_n$ .

**Lemme 5.10** *Quand  $n \xrightarrow{\in \mathcal{K}} +\infty$ ,*

$$\ln |\delta_n^*| \sim -\frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$$

*Il existe deux suites de réels  $a_m < b_m$  telles que*

$$a_m \sim b_m \sim -\frac{\ln q_{m+1}}{q_m}$$

*quand  $m \xrightarrow{\in \mathcal{K}} +\infty$  et telles que  $\forall m, n \in \mathcal{K}$ , si  $n > m$  alors*

$$a_m < \ln |\tau_{m \leftarrow n}(0)| < b_m$$

*Il existe une suite  $R''_m$  telle que*

$$\sum_{m \in \mathcal{K}} R''_m < +\infty$$

*et telle que  $\forall m, n \in \mathcal{K}$ , si  $n > m$  alors le diamètre hyperbolique de  $B_n$  dans le revêtement universel de  $B_m \setminus \{c_m\}$  est inférieur à  $\text{Argth}(R''_m)$ .*

**Preuve :**

Rappelons que  $\delta_n^* = \delta_n^* / R'_n$ , que  $\mathbf{i}2\pi \frac{p_n}{q_n} + (\delta_n^*)^{q_n} = \mathbf{i}2\pi\theta$ , que  $\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} q_{n+1} q_n \left| \frac{p_n}{q_n} - \theta \right| \in [1/2, 1]$ , et que  $\beta_q \stackrel{\text{def}}{=} q^3 R_q$  converge vers un réel  $> 0$  quand  $q \rightarrow +\infty$ . Donc

$$\ln |\delta_n^*| = \frac{\ln \left( 2\pi \left| \frac{p_n}{q_n} - \theta \right| \right)}{q_n} - \ln(R'_n) = -\frac{\ln q_{n+1}}{q_n} + \frac{\ln(2\pi\alpha_n / \beta_{q_n}) + 2 \ln(q_n)}{q_n}$$

Comme  $\ln(q_n) = o(\ln q_{n+1})$  quand  $n \rightarrow +\infty$  dans  $\mathcal{K}$ , on en déduit le premier équivalent.

Estimons maintenant  $|c_m - c_n|$  : d'une part  $|c_m - c_n| \leq d_m + d_n \leq 2d_m \leq 4\pi/q_m q_{m+1}$ . D'autre part,  $|c_m - c_n| \geq \frac{d_m}{2} \geq \frac{\pi}{2q_m q_{m+1}}$ . Donc (pour tous  $n > m$  entiers),

$$\frac{\pi}{2q_m q_{m+1}} \leq |c_m - c_n| \leq \frac{4\pi}{q_m q_{m+1}}$$

Maintenant

$$|\tau_{m \leftarrow n}(0)| = |c_m - c_n|^{1/q_m}$$

et donc

$$\ln |\tau_{m \leftarrow n}(0)| = \frac{\ln(2\pi\alpha_{m,n}) - \ln(q_m) - \ln(q_{m+1})}{q_m}$$

Avec  $1/2 \leq \alpha_{m,n} \leq 4$ . Comme  $\tau_{m \leftarrow n}(0) = \tau_{m \leftarrow n}(0)/R'_m$ , on en déduit que

$$a_m < \ln |\tau_{m \leftarrow n}(0)| < b_m$$

où

$$\begin{aligned} a_m &= -\frac{\ln(q_{m+1})}{q_m} + \frac{\ln(\pi/C_1) + 2\ln(q_m)}{q_m} \\ b_m &= -\frac{\ln(q_{m+1})}{q_m} + \frac{\ln(8\pi/C_2) + 2\ln(q_m)}{q_m} \end{aligned}$$

Soient  $m < n$  dans  $\mathcal{K}$ . Un revêtement universel de  $B_m \setminus \{c_m\}$  est donné par la fonction  $z \mapsto R_{q_m} \exp(z) + c_m$  définie sur le demi-plan "Re( $z$ ) < 0". L'application  $z \mapsto R.e^z$  est différentiable de différentielle  $dRe^z = Re^z dz$ . Comme  $B_n$  est de diamètre négligeable (indépendamment de  $n$  quand  $m \rightarrow +\infty$ ) devant la distance  $d = |c_m - c_n|$  séparant son centre et celui de  $B_m$ , et comme la fonction  $z \mapsto Re^z$  a des branches inverses définies sur  $\mathbb{C}$  privé de n'importe quelle demi-droite issue de 0, on en déduit par les théorèmes classiques de distortion (voir [P]) que le disque  $B_n$  se relève par cette fonction en un ouvert simplement connexe  $\mathcal{U}$ , très proche du disque de centre  $c = \ln((c_m - c_n)/R_{q_m})$  (on choisit n'importe quel  $\ln$ ) et de rayon  $r = \text{rayon}(B_n)/|c_n - c_m|$ . Par proche, nous entendons qu'il existe  $m_0 \in \mathcal{K}$  tel que  $\forall m, n \in \mathcal{K}$ , si  $n > m \geq m_0$ , alors un relevé de  $B_n$  est inclus dans  $B(c, 2r)$ .

$$\begin{aligned} 2r &\leq \frac{2C_1 q_m q_{m+1}}{\pi q_n^3} \leq \frac{2C_1 q_m}{\pi q_{m+1}^2} \\ -\text{Re}(c) &\geq \ln \frac{C_2}{q_m^3} - \ln \frac{8\pi}{q_m q_{m+1}} \sim \ln q_{m+1} \end{aligned}$$

quand  $m \rightarrow +\infty$  dans  $\mathcal{K}$ . Le diamètre de  $\mathcal{U}$  pour la métrique hyperbolique du demi-plan est donc inférieur à  $\text{Argth}(R''_m)$  avec

$$R''_m = O\left(\frac{q_m}{q_{m+1}^2 \ln(q_{m+1})}\right)$$

En particulier  $\sum_{m \in \mathcal{K}} R''_m$  converge. ■

Nous nous servons pas de la minoration par  $a_m$ .

### Revêtements successifs

Nous appellerons  $\chi_n : R'_n \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction  $\chi$  de la proposition 2.2, qui suit en fonction de  $\delta_n$  l'explosion en un cycle du point parabolique 0 du paramètre  $i2\pi p_n/q_n$ . Soit  $n_k$  la suite du lemme 5.9. On peut imposer que  $n_0 \geq 3$ . Pour  $k \geq 1$ , soit  $\mathbf{c}_k = \tau_{n_{k-1} \leftarrow n_k}(0)$ . Nous introduisons une nouvelle variable paramétrique  $t_k$ , qu'il faut imaginer située "entre"  $\delta_{n_k}$  et  $\delta_{n_{k-1}}$ . Soit  $\eta_k : t_k \mapsto \delta_{n_{k-1}}$  le revêtement universel de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ , qui envoie 0 sur  $\mathbf{c}_k$ . Plus précisément  $\eta_k(t_k) = e^{i\alpha + \alpha' \cdot h(t_k)}$ ,  $\alpha = \arg(\mathbf{c}_k)$ ,  $\alpha' = -\ln|\mathbf{c}_k|$  et  $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . La fonction  $\tau_{n_{k-1} \leftarrow n_k}$  se factorise à gauche par  $\eta_k$  : il existe  $\sigma_k : \mathbb{D} \rightarrow R''_{n_k} \mathbb{D}$  telle que  $\sigma_k(0) = 0$  et  $\tau_{n_{k-1} \leftarrow n_k} = \eta_k \circ \sigma_k$ , de sorte que  $\sigma_k : \delta_{n_k} \mapsto t_k$ . Le lemme 5.10 implique en particulier que  $\sigma_k(\mathbb{D}) \subset R''_{n_k} \mathbb{D}$ .

Nous allons effectuer une série de changements de variables dynamique, les nouvelles variables étant notées  $w_k$ ,  $w_0$  correspondant à la variable dynamique initiale  $z$ . Ce changement de variable dépend de  $\delta_{n_k}$ . La fonction correspondante sera notée  $\psi_k : (w_k, \delta_{n_k}) \mapsto w_{k-1}$ . L'explosion du cycle suivi dans la variable  $z$  par  $\chi_{n_k} : \delta_{n_k} \mapsto z$  sera suivie dans la variable  $w_k$  par une fonction notée  $f_k : \delta_{n_k} \mapsto w_k$ . La fonction  $f_k$  sera à valeur dans  $\rho_k \mathbb{D}$  pour un certain  $\rho_k > 0$ .

La définition se fait par récurrence :

- $\rho_0 = 4$
- pour tout  $\delta_{n_0} \in \mathbb{D}$ , on définit  $f_0(\delta_{n_0}) = \chi_{n_0}(\delta_{n_0})$ , où  $\delta_{n_0} = R'_{n_0} \delta_{n_0}$
- $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow \rho_0 \mathbb{D}$ , et  $f_0(0) = 0$  : en effet d'une part pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , un calcul élémentaire prouve qu'un nombre de module  $> 1 + |e^\lambda|$  est attiré par l'infini sous la dynamique de  $P_\lambda$ , donc  $K(P_\lambda)$  est inclus dans  $(1 + |e^\lambda|)\overline{\mathbb{D}}$ , d'autre part tout cycle de  $P_\lambda$  est inclus dans  $K(P_\lambda)$ , et enfin dans le cas qui nous intéresse ( $\lambda = i2\pi p/q + \delta^q$  avec  $q \geq 3$ ) on a  $\operatorname{Re}(\lambda) < R_3 < 0.76$ . Donc  $|f_0| < 3.2 < \rho_0$ . Rappelons que  $\lambda$  peut prendre des valeurs pour lesquelles  $K(P_\lambda)$  n'est pas connexe

Pour  $k \geq 1$ ,

- soit  $\phi_k : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{U}_k \subset \mathbb{C} \times \mathbb{D}$ , la fonction donnée par le lemme 5.7 pour le mouvement holomorphe  $z_i(t_k) = \rho_{k-1}^{-1} f_{k-1}(\zeta^i \eta_k(t_k))$ ,  $i = 0, \dots, q-1$ . Soit alors  $\rho_k = 1 + 5R''_{n_k}$ , comme suggéré par le lemme 5.7. Ainsi, pour tout  $\delta_{n_k} \in \mathbb{D}$ , la tranche de  $\mathcal{U}_k$  correspondant à  $t_k = \sigma_k(\delta_{n_k})$  est incluse dans  $\rho_k \mathbb{D}$
- soit  $\psi_k : \mathcal{V}_k \rightarrow \rho_k \mathbb{D}$ ,  $\mathcal{V}_k \subset \rho_k \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ , défini par  $\mathcal{V}_k = \{(w_k, \delta_{n_k}) \mid (w_k, t_k) \in \mathcal{U}_k\}$  et

$$\psi_k(w_k, \delta_{n_k}) = \rho_{k-1} \phi_k(w_k, t_k)$$

où  $t_k = \sigma_k(\delta_{n_k})$

– soit

$$H_k(w_k, \delta_{n_k}) = \psi_{1, \delta_{n_1}} \circ \dots \circ \psi_{k, \delta_{n_k}}(w_k)$$

où  $\delta_{n_j} = \tau_{n_j \leftarrow n_k}(\delta_{n_k})$ . Pour tout  $\delta_{n_k} \in \mathbb{D}$  fixé, la tranche correspondante de la fonction  $H_k$  est défini sur un sous-ensemble de la tranche correspondante de  $\mathcal{V}_k$ , et à valeur dans  $\rho_0 \mathbb{D}$ .

– la tranche  $\delta_{n_k}$  de  $H_k$  est notée  $H_{k, \delta_{n_k}} : w_k \mapsto H_k(w_k, \delta_{n_k})$ . C'est une composée de revêtements, donc le revêtement universel en 0 de  $\rho_0 \mathbb{D}$  privé de la réunion des cycles de période  $q_{n_0}, \dots, q_{n_{k-1}}$  correspondants aux paramètres  $\delta_{n_j} = \tau_{n_j \leftarrow n_k}(\delta_{n_k})$  se factorise à gauche (pour la composition) par cette même tranche de  $H_k$ . Autre conséquence,  $\frac{\partial}{\partial w_k} H_k \neq 0$

– alors  $f_k : \mathbb{D} \rightarrow \rho_k \mathbb{D}$  est définie par l'équation  $\forall \delta_{n_k} \in \mathbb{D}$ ,

$$H_k(f_k(\delta_{n_k}), \delta_{n_k}) = \chi_{n_k}(\delta_{n_k})$$

où  $\delta_{n_k} = R'_{n_k} \delta_{n_k}$ , et par la condition  $f_k(0) = 0$ . Le théorème des fonctions implicites et le fait que les cycles de période  $q_{n_0}, q_{n_1}, \dots, q_{n_k}$  n'entrent pas en collision dans  $B_n$  garantissent l'existence de  $f_k$

### Majoration de la distance de 0 aux points périodique de $P_{\lambda_\theta}$

Soit  $t_k^* = \sigma_k(\delta_{n_k}^*)$ .

$$H'_{k, \delta_{n_k}^*}(0) = \prod_{j=1}^k \psi'_{j, \delta_{n_j}^*}(0)$$

Donc

$$H'_{k, \delta_{n_k}^*}(0) = \rho_0 \cdots \rho_{k-1} \prod_{j=1}^k \phi'_{j, t_j^*}(0)$$

Majorons ce produit :

– Le produit des  $\rho_k$  est convergent (rappelons que  $\rho_k > 1$ ) : en effet  $\rho_k = 1 + R''_{n_k}$  et  $\sum_{n \geq 0} R''_n$  converge.  
 – Majorons  $|\phi'_{j, t_j^*}(0)|$ . Soit  $c_0 = 1 - \ln(2)$  et  $r_k = |\delta_{n_k}^*|$ . D'après la section sur les variables  $\delta_n$ , nous savons que

$$\ln r_k \sim -\frac{\ln q_{n_k+1}}{q_{n_k}} \quad (\rightarrow 0)$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln r_k = -\infty$$

d'une part, et d'autre part

$$-q_{n_k} \ln r_k \sim -\ln q_{n_k+1} \rightarrow +\infty$$

Donc il existe un rang  $K_0$  à partir duquel pour tout  $k > K_0$ ,  $-q_{n_k} \ln r_k > 400$  et  $r_k > e^{-1}$ . D'après le corollaire 5.6, on a alors

$$\ln |\phi'_{j, t_j^*}(0)| \leq c_0 \ln r_k$$

Ainsi, quand  $k \rightarrow +\infty$  dans  $\mathcal{K}$ ,

$$H'_{k, \delta_{n_k}^*}(0) \rightarrow 0$$

Soit  $V_k = r_0\mathbb{D}$  privé de la réunion pour  $j = 0, \dots, k-1$  du cycle de  $P_{\lambda_\theta}$  donné par  $\chi_{n_j}(\delta_{n_j}^* \mathbb{U}_{q_{n_j}})$ . Considérons la fonction  $\phi_{V_k}$ , revêtement universel de  $\mathbb{D}$  vers  $V_k$  envoyant 0 sur 0 avec dérivée réelle positive. Comme  $\phi_{V_k} : \mathbb{D} \rightarrow V_k$  se factorise à gauche par  $H_{k, \delta_{n_k}^*}$ , i.e.  $\phi_{V_k} = H_{k, \delta_{n_k}^*} \circ f$  avec  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $0 \mapsto 0$ , on en déduit que

$$\phi'_{V_k}(0) \rightarrow 0$$

quand  $k \rightarrow +\infty$  dans  $\mathcal{K}$ . Or  $\phi'_{V_k}$  est minoré par la distance de 0 au bord de  $V_k$ .

On en déduit que 0 est accumulé par des points périodiques de  $P_{\lambda_\theta}$ . Q.E.D.

### *D'autres polynômes*

Nous cherchons à adapter ce résultat aux polynômes  $z^d + c$ . La difficulté provient de ce que nous ne savons pas démontrer le théorème 2.3 dans ce cadre, car la proposition 2.8 n'est plus exacte pour  $d \geq 3$  : il y a exactement  $d-2$  valeurs de  $\lambda$  dans l'analogie du membre  $p/q$  telles le polynôme correspondant  $P$  ait un point parabolique  $z$  de période  $q$  à un pétale (c'est-à-dire  $(P^q)'(z) = 1$ ). Comme ce nombre de contre-exemples est majoré par une borne indépendante de  $q$ , on peut peut-être s'en sortir en modifiant la proposition 2.2. Peut-on plus généralement adapter la preuve au cas des fractions rationnelles dont tous les points critiques, sauf un, est dans l'ensemble de Fatou ?

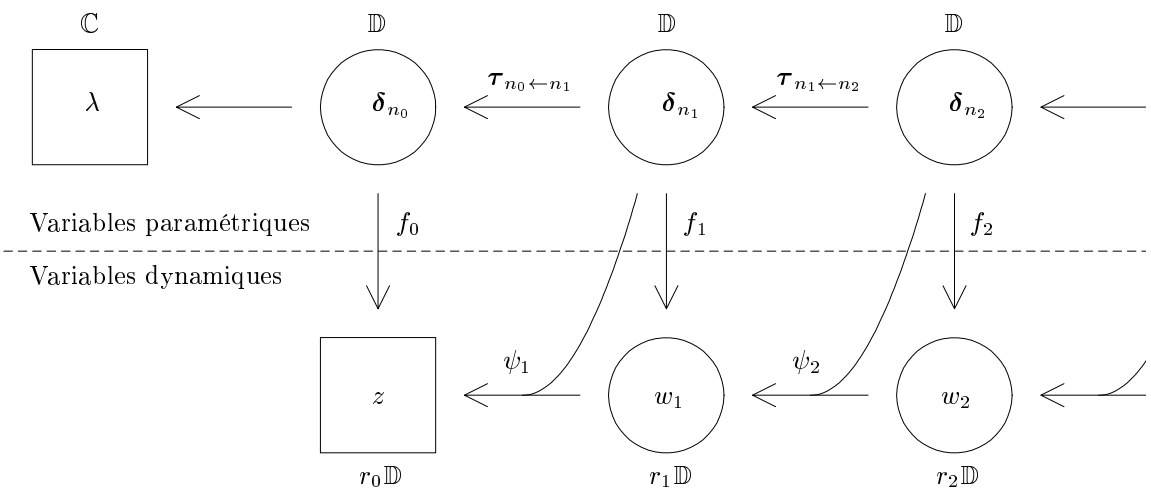


Fig. 5.1 – Relation entre les diverses variables

## 6. Appendice

### 6.1 Un contre exemple

Le contre exemple de cette section est dans le cadre des fonctions  $G_n$  des sections 3.2 et 4.1.

Fixons  $q$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous allons montrer que l'absence de point périodique non nul pour  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telle que  $|f - \text{Id}| < \varepsilon$  et ayant un point fixe en 0 de multiplicité  $q$  n'est pas une condition suffisante pour minorer l'aire du bassin d'attraction de 0.

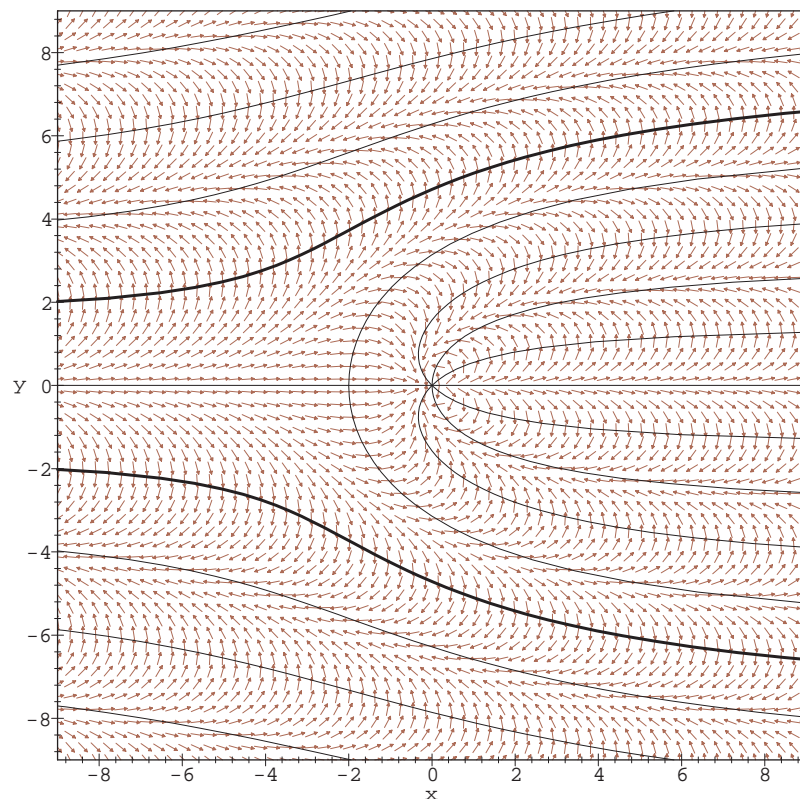


FIG. 6.1 – Le champ de vecteur  $V(z)$  et quelques isoclines, celles formant le bord de  $W$  sont en trait plein



Considérons le champ de vecteurs suivant :

$$V(z) = \frac{z^2 e^z}{dz}$$

Soient  $I_-$  et  $I_+$  les deux isoclines d'angles respectifs  $-\pi/2$  et  $\pi/2$  contenues dans la bande " $y < 3\pi$ ". Leur équation est " $x = y \tan \frac{y}{2}$ " avec  $y \in$  respectivement  $] -3\pi, -\pi[$  et  $]\pi, 3\pi[$ . Soit  $W$  l'ensemble des points situés en dessous de  $I_-$  ou au dessus de  $I_+$ . Pour tout  $z \in W$ ,  $z = x + iy$  a une trajectoire qui vérifie soit  $x \rightarrow +\infty$ , soit  $x \rightarrow -\infty$  quand le temps  $t \rightarrow +\infty$ .

*Preuve* : Nous supposons  $z$  au dessus de  $I_+$ , l'autre cas étant symétrique. Les composantes connexes des isoclines situées au dessus de  $I_+$  sont des graphes de fonction croissantes  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y$ . Sur toute verticale, l'angle  $a$  du champ de vecteur est une fonction croissante de  $y$ . Les bandes d'équation  $a \in [\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]$  sont donc des pièges. Une trajectoire qui y rentre aura sa partie réelle décroissante, et comme le champ de vecteur n'a pas de point fixe (autre que 0), elle tend vers  $-\infty$ . Une trajectoire qui n'y rentre jamais vérifie  $a \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , et donc sa partie réelle est croissante, et tend vers  $+\infty$  pour la même raison.  $\square$

Le champ  $V$  n'a pas de trajectoire périodique autre que 0.

*Preuve* : Supposons qu'une telle trajectoire  $T$  existe. Le champ  $V$  ne s'annulant qu'en 0,  $T$  est non constante. C'est donc une courbe de Jordan, et d'après la topologie algébrique élémentaire, elle doit entourer un point  $p_0$  tel que  $V(p_0) = 0$ , Le point  $p_0$  ne peut être que 0. Mais  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  sont deux trajectoires de  $V$ . Une orbite périodique ne peut donc pas entourer 0. Cela conduit à une contradiction.  $\square$

Fixons  $a > 0$  quelconque, et considérons le domaine  $P_1 = "x < a"$ ,  $h = h_a$  l'isomorphisme de  $P_1$  dans  $2\mathbb{D}$  qui envoie 0 sur 0 et avec une dérivée réelle positive en 0, et  $V_2$  l'image  $h_*(V)$  du champ  $V$  par  $h$ . Alors tout point de  $\mathbb{D} \cap h(W)$  finit par sortir de  $\mathbb{D}$  sous le flot de  $V_2$ . L'aire de l'ensemble  $\mathbb{D} \setminus h(W)$  tend vers 0 quand  $a \rightarrow +\infty$ .

Prenons maintenant le flot  $f_\eta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  de  $V_2$  sur une durée  $\eta$  suffisamment petite pour que  $f_\eta$  soit définie sur tout  $\mathbb{D}$  et  $|f_\eta - \text{Id}| < \varepsilon$ . Le champ de vecteur  $V_2$  n'a pas de trajectoire périodique hormis la trajectoire constante 0. Donc la fonction  $f_\eta$  n'a pas d'autre point périodique que 0. Le contre exemple que nous recherchons est le pull-back  $f$  de la dynamique  $f_\eta$  par  $z \mapsto z^q : g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  est telle que  $g(z)^q = f_\eta(z)$ . Une telle fonction existe dès que  $|f_\eta - \text{Id}|$  est suffisamment petit. Les points de  $\mathbb{D} \setminus \sqrt[q]{h(W)}$  s'échappent tous de  $\mathbb{D}$ , et comme  $q$  est fixé,  $\sqrt[q]{h(W)}$  peut avoir une aire arbitrairement petite pourvu que  $a$  soit suffisamment grand.

## 6.2 Preuve de la proposition 2.8

Rappelons que  $c$  est lié à  $\lambda$  par les relations  $\rho = e^\lambda$  et  $c = \rho/2 - (\rho/2)^2$ . La proposition en question est :

**Proposition 2.8**  $\forall p \wedge q = 1, \forall \lambda \in M_{\frac{p}{q}},$  si le polynôme  $P_\lambda$  a un point parabolique  $z$  de période  $k$ , alors soit  $k > q$ , soit  $k = q$  et alors  $(P_\lambda^q)'(z) \neq 1$ .

La proposition 2.8 est triviale quand  $q = 1$ , car le seul paramètre  $c$  pour lequel  $Q_c$  a un point fixe de multiplicateur 1 est  $c = 1/4$ , et  $c = 1/4$  si et seulement si  $\lambda \in i2\pi\mathbb{Z}$ .

Si  $q \geq 2$  et  $\lambda \in M_{p/q}$ , nous noterons  $\beta$  le point d'aboutissement du rayon externe de  $Q_c$  d'argument 0 et  $\alpha$  l'autre point fixe de  $Q_c$ . Le point fixe  $\beta$  est toujours répulsif ou de multiplicateur 1 (voir [DH], exposé VIII, Ch. II, § 2). Nous utiliserons le fait suivant :

**Proposition 6.1** Pour tout  $\lambda \in M_{p/q}$ , les rayons externes de  $Q_c$  qui atterrissent en  $\alpha$  sont les mêmes. Ils sont au nombre de  $q$ , et  $Q_c$  agit transitivement dessus. Si on ordonne circulairement ces rayons par leur argument, l'action de  $Q_c$  est équivalente à la rotation d'angle  $p/q$  sur l'ensemble des racines  $q$ -ièmes de l'unité.

On peut reconstituer cet énoncé à partir de [DH].

Le polynôme  $Q_c$  est un homéomorphisme de chaque rayon externe sur le rayon image. Soit  $\mathcal{U}$  le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de la réunion du point  $\alpha$  et des  $q$  rayons externes qui y aboutissent. L'ouvert  $\mathcal{U}$  a  $q$  composantes connexes, et elles sont simplement connexes, chacune délimitée par  $\alpha$  et deux rayons externes. Rappelons que 0 est l'unique point critique de  $Q_c$ .

**Lemme 6.2** Pour tout  $\lambda \in M_{p/q}$ , il y a dans chaque composante connexe de  $\mathcal{U}$  un point de l'ensemble  $\{0, Q_c(0), \dots, Q_c^{q-1}(0)\}$ .

**Preuve** : Soit  $C$  une composante de  $\mathcal{U}$ . Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  les rayons externes qui la bornent. Soit  $C'$  la composante bornée par les images de ces rayons. On notera  $C \mapsto C'$ , mais attention, le polynôme  $Q_c$  n'applique pas nécessairement  $C$  dans  $C'$ .

*Assertion* : Si 0 n'appartient pas à  $C$ , alors  $Q_c$  est un isomorphisme de  $C$  vers  $C'$ .

*Preuve* : Le polynôme  $Q_c$  n'a pas de valeur critique sur  $\partial C'$ . Il y a donc une et une seule composante connexe  $O$  de  $Q_c^{-1}(C')$  dont le bord contient  $\partial C$ , puisque ce dernier s'envoie dans  $\partial C'$ . Une analyse au voisinage de  $\infty$  montre que  $O$  a au moins un point commun avec  $C$ , donc  $O \subset C$  (car  $C$  est connexe et  $O \cap \partial C = \emptyset$ ). Comme  $C$ , donc  $O$ , ne contient pas le point critique de  $Q_c$  et comme  $Q_c$  est propre de  $O$  vers  $C'$ , on en déduit que  $Q_c$  est un isomorphisme de  $O$  vers  $C'$ . Montrons que  $Q_c$  est injectif sur  $\partial O$  : en effet d'après le théorème de Jordan-Schoenflies, tout point

au bord de  $C'$  a une base de voisinages  $V$  tels que  $V \cap C'$  est connexe, donc à deux points distincts  $z$  et  $z'$  dans  $\partial O$  qui s'envoient sur le même point  $u$  correspondent deux branches inverses locales de  $Q_c$  définies sur un voisinage  $V$  de  $u$  tel que  $V \cap C'$  est connexe; l'image de  $V \cap C'$  par ces deux branches est incluse dans  $O$ , ce qui contredit l'injectivité de  $Q_c$  sur  $O$ . Donc  $Q_c$  est injective sur  $\partial O$  qui, rappelons-le, contient  $\partial C$  et s'envoie dans  $\partial C'$ . Or  $\partial C$  s'envoie surjectivement sur  $\partial C'$ , donc  $\partial O \subset \partial C$ . Maintenant, puisque  $O$  est ouvert, non vide, et  $C$  est connexe, c'est que  $O = C$ . Donc  $Q_c$  est un isomorphisme de  $C$  vers  $C'$ .  $\square$

*Assertion* : Si  $0 \in C$ , alors  $Q_c(0) \in C'$ .

*Preuve* : Supposons le contraire. Alors l'analyse précédente prouve que  $Q_c$  est un isomorphisme de  $C$  dans  $C'$ , donc  $C$  ne contient pas le point critique, ce qui est absurde.  $\square$

De la proposition 6.1 on déduit que l'application  $C \mapsto C'$  est transitive sur les composantes connexes de  $\mathcal{U}$ . Donc les  $q$  premières itérées de 0 (de 0 à  $Q_c^{q-1}(0)$ ) doivent visiter les composantes de  $\mathcal{U}$ , en suivant la fonction  $C \mapsto C'$ .  $\blacksquare$

Supposons que  $Q_c$  a un point parabolique  $z$ , de période  $k$ . Montrons que  $k \neq 1$ . S'il était fixe,  $z$  serait égal à  $\alpha$  ou  $\beta$ . Or si  $\alpha$  est parabolique alors soit  $\lambda \in \mathbf{i}\mathbb{R}$ , ce qui est exclu car nous avons supposé que  $\lambda$  est dans un membre, soit  $\exists p \in \mathbb{Z} \lambda \in M_p$  (i.e  $q = 1$ ), ce qui est exclu car nous avons supposé  $q \geq 2$ . Si  $\beta$  est parabolique, nous avons vu que  $\lambda \in 2\pi\mathbf{i}\mathbb{Z}$ , ce qui est exclu. Donc  $k > 1$ .

Le point critique 0 appartient au bassin immédiat d'un point du cycle de  $z$ . Nous pouvons toujours supposer que  $z$  est ce point du cycle. À l'aide des pétales, on construit un chemin  $\gamma$  dans  $K(Q_c)$  reliant  $z$  à 0, et qui ne rencontre  $J(Q_c)$  qu'en  $z$ , de sorte qu'il est entièrement inclus dans  $\mathcal{U}$ , ainsi que ses images successives. Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_c^n(z)$  et  $Q_c^n(0)$  sont dans la même composante de  $\mathcal{U}$ . Ceci et le lemme 6.2 impliquent que le cycle de  $z$  a au moins  $q$  points. Donc  $k \geq q$ .

Dans le cas où  $k = q$ , prouvons que  $(Q_c^q)'(z) \neq 1$ . Supposons le contraire. Il y a au moins un rayon externe qui aboutit en  $z$ , et un tel rayon est fixé par  $Q_c^q$  (voir [DH], en fait il y en a exactement 2). Ses images successives par  $Q_c$  ont des angles externes ordonnées dans le même ordre que les rayons aboutissant en  $\alpha$ , puisque pour  $n < q$ , la  $n$ -ième image doit être dans la même composante de  $\mathcal{U}$  que 0. C'est impossible : en effet pour la dynamique de  $z \mapsto z^2$ , il y a un seul cycle avec un nombre de rotation fixé (voir [BS]).

**Remarque** : Notons que c'est ce dernier argument qui ne s'adapte pas au cas de la famille  $z^d + c$  : dans cette dernière pour tous  $p/q$ , il y a des valeurs de ' $c$ ' dans le membre  $p/q$  telles que le polynôme correspondant ait un point de période  $q$  et de multiplicateur 1.

### 6.3 Preuve de la proposition 3.4 (d'après Jellouli)

Rappelons que  $\theta$  est un irrationnel,  $p_n/q_n$  ses réduites, et  $\lambda_n = \mathbf{i}2\pi p_n/q_n$ .

**Proposition 3.4** *Supposons  $r(\theta) > 0$ . Soit  $\Phi : \Delta(\theta) \rightarrow r(\theta)\mathbb{D}$  l'isomorphisme conforme envoyant 0 sur 0 avec dérivée 1. Soit  $F_\lambda = \Phi \circ P_\lambda \circ \Phi^{-1}$ . Alors pour tout compact  $C$  de  $r(\theta)\mathbb{D}$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ , les  $q_n$  premières itérées de  $F_{\lambda_n}$  sont définies sur  $C$  et ne sortent pas de  $r(\theta)\mathbb{D}$ . On a de plus une constante  $K > 0$  (dépendant de  $C$ ) telle que  $\forall z \in C$ ,  $\forall n \geq N$ , et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,*

$$\text{si } k \leq q_n \text{ alors } |F_{\lambda_n}^k(z) - e^{k\lambda_n} \cdot z| \leq \frac{K|z|k}{q_n^2}$$

*En particulier  $F_{\lambda_n}^{q_n} \rightarrow \text{Id}$  uniformément sur tout compact de  $r(\theta)\mathbb{D}$ .*

Quand  $\lambda \rightarrow \mathbf{i}2\pi\theta$ ,  $P_\lambda$  tend uniformément vers  $P_{\mathbf{i}2\pi\theta}$  sur tout compact de  $\mathbb{C}$ . Donc  $F_\lambda$  tend uniformément sur tout compact de  $r(\theta)\mathbb{D}$  vers  $F_{\mathbf{i}2\pi\theta} = (z \mapsto e^{\mathbf{i}2\pi\theta} z)$ . Comme  $F_\lambda(0) = 0$  et  $F'_\lambda(0) = P'_\lambda(0) = e^\lambda$ , nous pouvons noter

$$F_\lambda(z) = e^\lambda \cdot z \cdot G_\lambda(z)$$

où  $G_\lambda$  est holomorphe et  $G_\lambda(0) = 1$ . Quand  $\lambda \rightarrow \mathbf{i}2\pi\theta$ , alors  $G_\lambda(z) \rightarrow 1$  uniformément sur tout compact de  $r(\theta)\mathbb{D}$  (pour le prouver, on fixe  $r' < r(\theta)$ , et on utilise le principe du maximum sur le disque  $r'\mathbb{D}$ ; il suffit alors de vérifier  $G_\lambda \rightarrow 1$  sur le bord de ce dernier).

Soit  $r' < r(\theta)$  et considérons un  $\varepsilon > 0$  pour lequel  $F_\lambda(z)$  est défini sur  $r'\mathbb{D}$  et  $|G_\lambda - 1| < 1$  sur  $r'\mathbb{D}$  dès que  $|\lambda - \mathbf{i}2\pi\theta| < \varepsilon$ . Soit  $U = \{w \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(w) < \ln(r')\}$ . Soit

$$H_\lambda = l \circ G_\lambda$$

où  $l$  est la branche du logarithme définie sur  $1 + \mathbb{D}$  et qui envoie 1 sur 0. Soit  $I_\lambda$  défini par

$$I_\lambda(w) = w + \lambda + H_\lambda(e^w)$$

Alors pour tout  $w \in U$  et pour  $|\lambda - \mathbf{i}2\pi\theta| < \varepsilon$ ,

$$F_\lambda(e^w) = e^{I_\lambda(w)}$$

Le point fondamental est que

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Puisque  $G_{\mathbf{i}2\pi\theta} = (z \mapsto 1)$  et  $G_\lambda$  est une famille analytique de fonctions holomorphes (sur  $r'\mathbb{D} \times (\mathbf{i}2\pi\theta + \varepsilon\mathbb{D})$ ), nous en déduisons qu'il existe  $K > 0$  tel que

$$|H_\lambda(w)| \leq K|\lambda - \mathbf{i}2\pi\theta|$$

Pour  $w \in U$  et  $|\lambda - \mathbf{i}2\pi\theta| < \varepsilon$ . Alors

$$|I_{\lambda_n}(w) - w - \lambda_n| = |H_{\lambda_n}(e^w)| \leq K|\lambda_n - \mathbf{i}2\pi\theta| \leq K\frac{2\pi}{q_n^2}$$

Ainsi, si  $\operatorname{Re}(w) < \ln(r') - K2\pi/q_n$ , alors on peut montrer par récurrence que pour  $k = 0, \dots, q_n$  :

$$\operatorname{Re}(I_{\lambda_n}^k(w)) < \ln(r') - K2\pi\frac{q_n - k}{q_n^2}$$

(et donc  $I_{\lambda_n}^k(w) \in \operatorname{Def} I_{\lambda_n}$  si  $k < q_n$ ), et que

$$\left| I_{\lambda_n}^k(w) - w - k\mathbf{i}2\pi\frac{p_n}{q_n} \right| \leq K2\pi\frac{k}{q_n^2}$$

Donc pour  $z \in r'\mathbb{D}$ , et  $|\lambda_n - \mathbf{i}2\pi\theta| < \varepsilon$  (c'est-à-dire  $n$  assez grand),

$$\left| \frac{F_{\lambda_n}^k(z)}{e^{k\lambda_n} z} - 1 \right| < e^{K2\pi k/q_n^2} - 1$$

On en déduit la proposition, quitte à augmenter la valeur de  $K$ .

## 6.4 Preuve alternative de la proposition 4.16

Rappelons que  $\theta$  est un irrationnel,  $p_n/q_n$  ses réduites, et  $\lambda_n = \mathbf{i}2\pi p_n/q_n$ .

**Proposition 4.16** *Pour tout compact  $C \subset \Delta(\theta)$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ , l'itéré  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  n'a pas de point fixe différent de 0 dans  $C$ .*

Notre preuve alternative de la fuite de des points fixes de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  est basée sur le fait suivant : soit  $\lambda_0 = \mathbf{i}2\pi\frac{p}{q}$ . Quand  $\lambda$  varie dans  $B(\lambda_0, R_q) \setminus \{\lambda_0\}$ , les points fixes de  $P_{\lambda}^q$  n'entrent pas en collision. Fixons  $\theta \in \mathcal{S}$ .

*Résumé de la preuve :* Reprenons les notations de la section 3.1. Soit  $\mathcal{E}$  une équi-potentielle de potentiel  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $s_\varepsilon$  soit proche de  $r(\theta)$ . On avait introduit des fonctions  $\kappa_{p/q, \varepsilon}$  qui suivent l'explosion du point fixe multiple 0 de  $P_{\mathbf{i}2\pi p/q}$ , après conjugaison par une représentation conforme, en termes d'une racine  $q$ -ième de la perturbation. Pour  $n$  suffisamment grand, d'une part par l'inégalité de Schwarz implique que  $|\kappa'_{p_n/q_n, \varepsilon}(0)| < \text{un majorant proche de } r(\theta)$  (ce majorant est  $s_\varepsilon/R_q^{1/q_n}$ ). D'autre part, nous avons prouvé (section 3.2) que  $\kappa'_{p_n/q_n, \varepsilon}(0) \rightarrow r(\theta)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ainsi, la dérivée en 0 de la fonction  $\kappa'_{p_n/q_n, \varepsilon}$  est proche de la borne donnée par l'inégalité de Schwarz. Ceci implique que cette fonction est proche de l'application linéaire de même dérivée en 0, et ce sur un disque  $r\mathbb{D}$  de rayon proche de 1. Quand aux autres points fixes de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$ , ils dépendent holomorphiquement de  $\lambda (= \lambda_n + \delta^{q_n})$ , donc ils se déplacent beaucoup plus lentement que ceux issus du point parabolique quand  $\delta$  varie dans  $r\mathbb{D}$ . Ceci exclue tout point fixe de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$

d'un grand compact de  $\Delta(\theta)$ . En effet, s'il y avait un point fixe dans ce compact, alors il y aurait une valeur de  $\delta$  telle que les points fixes (rapides) issus de l'explosion entrent en collision avec ce dernier (lent), ce qui mène à une contradiction.

*Détail de la preuve :*

Le lemme suivant est un complément au lemme de Schwarz. Nous l'utiliserons dans le cadre suivant :  $r$  est majoré par une constante proche de 1, et  $a \rightarrow 1$ , auquel cas la constante  $r'$  donnée par le lemme  $\rightarrow r$ .

**Lemme 6.3** *Soit  $f$  une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  telle que  $f(0) = 0$  et posons  $a = |f'(0)|$ . Alors  $\forall r \in ]0, a[$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,*

$$|f(re^{it})| \geq r' \text{ où } r' = r \frac{a-r}{1-ar}$$

*De plus,  $\forall z \in r'\mathbb{D}$ ,  $\text{ind}_z f \circ \gamma = 1$  où  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  est le lacet  $t \mapsto re^{i2\pi t}$ .*

**Preuve :** Notons que la proposition est vide si  $a = 0$ . Supposons  $a > 0$ . La fonction  $g(z) = f(z)/z$  est définie et holomorphe sur  $\mathbb{D}$ . Elle applique 0 sur  $a$ , et  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  d'après le principe du maximum. Donc  $g$  est 1-Lipschitz pour la métrique hyperbolique de  $\mathbb{D}$ . Donc si  $|z| \leq r$ , alors  $g(z)$  appartient au disque hyperbolique ouvert de centre  $a$  et de rayon  $\text{Argth}(r)$ . En particulier, posons  $b = f'(0)/|f'(0)| : \forall z \in r\mathbb{D}$ ,

$$\text{Re} \left( \frac{g(z)}{b} \right) > \frac{a-r}{1-ar}$$

Le reste suit aisément. ■

Pour alléger les notations, soit  $R'_n = R_{q_n}^{1/q_n} : R'_n \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Soit  $\Phi$  l'isomorphisme de  $\Delta(\theta)$  vers  $r(\theta)\mathbb{D}$  qui envoie 0 sur 0 avec dérivée 1. Soient  $\Phi_\varepsilon : V_\varepsilon \rightarrow s_\varepsilon\mathbb{D}$  les fonction de la section 3.1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  un potentiel pour lequel  $K(P_\lambda) \subset V_\varepsilon$  pour tout  $\delta \in R'_n \mathbb{D}$  et  $\lambda = \lambda_n + \delta^{q_n}$ . Rappelons que d'après le théorème de Carathéodory, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$s_{\varepsilon_n} \rightarrow r(\theta)$$

et que  $L_a \left( \frac{p_n}{q_n} \right) \rightarrow r(\theta)$  d'après la formule 3.2 du théorème 3.1, d'où

$$\left| \kappa'_{p_n/q_n, \varepsilon_n}(0) \right| = q_n^{2/q_n} L_a \left( \frac{p_n}{q_n} \right) \rightarrow r(\theta)$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Fixons momentanément  $n$ . Soit  $z_0$  un point fixe non nul de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$ . Soit  $Z_0 = \Phi_{\varepsilon_n}(z_0)$ . Nous savons d'après la proposition 2.2 qu'il existe  $l$  tel que  $z_0 = \xi_l(\lambda_n)$ , avec les notations de cette proposition. Considérons  $\zeta_1 = \Phi_{\varepsilon_n} \circ \xi_l$ . Cette fonction paramétrise en fonction de  $\lambda$  le mouvement dans les coordonnées  $\Phi_{\varepsilon_n}$  du point fixe initialement

égal à  $z_0$ . C'est une fonction holomorphe de  $R_{q_n} \mathbb{D} + \lambda_n$  dans  $s_{\varepsilon_n} \mathbb{D}$ . Elle est donc 1-Lipschitz pour les métriques hyperboliques respectives de ces disques. Donc

$$\frac{|\zeta_1(\lambda)|}{s_{\varepsilon_n}} < u(|\lambda - \lambda_n|) \quad \text{où} \quad u(x) = \frac{\frac{x}{R_{q_n}} + \frac{|Z_0|}{s_{\varepsilon_n}}}{1 + \frac{x}{R_{q_n}} \frac{|Z_0|}{s_{\varepsilon_n}}}$$

Notons  $\phi = \kappa_{p_n/q_n, \varepsilon_n}$ , et  $\zeta_0 = \Phi_{\varepsilon_n} \circ \phi$ . C'est une fonction qui paramétrise le mouvement dans les coordonnées  $\Phi_{\varepsilon_n}$  de l'explosion du point parabolique, en fonction de  $\delta$ . D'après la proposition 2.2,  $\forall \delta \in R'_n \mathbb{D}$ ,  $\zeta_l(\lambda_n + \delta^{q_n}) \neq \phi(\delta)$ . Donc la fonction  $Y(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0(\delta) - \zeta_1(\lambda)$  (où  $\lambda = \lambda_n + \delta^{q_n}$ ) fait un nombre de tours = 0 autour du point 0 quand  $\delta$  décrit un cercle centré en 0 et inclus dans  $R'_n \mathbb{D}$ .

Fixons  $t \in ]0, 1[$ . Soit

$$a_n = \left| \kappa'_{p_n/q_n, \varepsilon_n}(0) \right| \frac{R'_n}{s_{\varepsilon_n}}$$

On voit que  $a_n \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc il existe  $N = N_t \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $a_n > t$ . Nous supposons maintenant que  $n \geq N$ . Soit

$$r'_n = t \frac{a_n - t}{1 - a_n t}$$

la suite  $r'_n \rightarrow t$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . D'après le lemme 6.3, quand  $\delta$  décrit le cercle de centre 0 et de rayon  $tR'_n \mathbb{D}$ ,  $\zeta_0(\delta)$  fait un nombre de tours = 1 autour de 0, tout en restant à distance supérieure ou égale à  $s_{\varepsilon_n} r'_n$  de 0. Supposons maintenant que pour un certain point fixe  $z_0$  de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$ ,  $u(t^{q_n} R_{q_n}) < r'_n$  : alors  $|\zeta_1(\lambda)| < s_{\varepsilon_n} r'_n < |\zeta_0(\delta)|$  donc quand  $\delta$  décrit le cercle de centre 0 et de rayon  $tR'_n \mathbb{D}$ ,  $Y(\delta)$  par le théorème de Rouché ferait le même nombre de tours autour de 0 que  $\zeta_0$ , ce qui est impossible car on a vu que le premier est égal à 0 et le deuxième à 1. Donc  $u(t^{q_n} R_{q_n}) \geq r'_n$ , c'est-à-dire

$$\frac{t^{q_n} + \frac{|Z_0|}{s_{\varepsilon_n}}}{1 + t^{q_n} \frac{|Z_0|}{s_{\varepsilon_n}}} \geq r'_n$$

dont il découle une borne inférieure pour  $|Z_0|$  :

$$|Z_0| \geq l_n \quad \text{où} \quad l_n = s_{\varepsilon_n} \frac{r'_n - t^{q_n}}{1 - t^{q_n} r'_n}$$

Qui est valable, rappelons-le, pour tout  $N > N_t$ , tout  $z_0$  point fixe de  $P_{\lambda_n}^{q_n}$  et  $Z_0 = \Phi_{\varepsilon_n}(z_0)$ . Maintenant quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $\Phi_{\varepsilon_n}$  tend vers  $\Phi$  sur tout compact, et

$$l_n \rightarrow r(\theta)t$$

Comme  $t \in ]0, 1[$  peut être choisi arbitrairement, il est maintenant aisé d'en déduire la proposition 4.16.

## 6.5 Remarques concernant la section 5

### Estimation d'un r.c.r.u.

Soit  $r \in ]0, 1[$ ,  $q \geq 3$ ,  $V = \mathbb{D} \setminus r\mathbb{U}_q$  (où  $\mathbb{U}_q$  est l'ensemble des racines  $q$ -ièmes de l'unité), et  $r_u(r, q)$  le rayon conforme en 0 du revêtement universel de  $V$ . Nous allons estimer  $\ln r_u(r, q)/\ln r$  quand simultanément  $r \rightarrow 1$  et  $-q \ln(r)$  tend vers une certaine constante positive.

### Une fonction

Soit  $r > 0$ ,  $U_r = \mathbb{D} \setminus [r, 1[$ , alors l'uniformisation  $\phi_{U_r} : \mathbb{D} \rightarrow U_r$  de  $U_r$  en 0 est la réciproque  $h \mapsto a$  de la fonction  $a \mapsto h$  définie par :

$$\begin{aligned} - b &= -a \\ - c &= \frac{b+r}{1+rb} \\ - d &= \sqrt{c} \text{ (la branche définie sur } \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \text{ et qui envoie 1 sur 1)} \\ - e &= \frac{1+id}{1-id}, f = e^2, g = -\frac{1+if}{f+i} \\ - \text{notons que } g &= \frac{2d - (1-d^2)}{2d + (1-d^2)}. \\ - h &= -\frac{g+g_0}{1+g_0g}, \text{ où } g_0 = \frac{2d_0 - (1-d_0^2)}{2d_0 + (1-d_0^2)} \text{ et } d_0 = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Un calcul donne  $\partial h/\partial a = (r+1)^2/4r$ , d'où

$$r_{U_r} = \frac{4r}{(r+1)^2}$$

### Minoration

Soit  $V_m = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=0}^{q-1} [r\zeta^i, \zeta^i]$  où  $\zeta = e^{i2\pi/q}$ . L'ensemble  $V_m$  est simplement connexe et inclus dans  $V$ , donc son rayon conforme en 0 est inférieur à celui de  $\tilde{V}$ . Nous pouvons trouver une formule pour  $\phi_{V_m} : \phi_{V_m}(z)^q = \phi_{U_{r^q}}(z^q)$ , d'où  $r_{V_m}^q = r_{U_{r^q}}$ . Donc

$$r_u(r, q) \geq r_-(r, q) = \left( \frac{4r^q}{(1+r^q)^2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

### Majoration

La composée  $g = \cdot^q \circ \phi_V(z)$  est à valeur dans  $U = \mathbb{D} \setminus \{r^q\}$ , donc  $g$  se factorise :  $g = \phi_U \circ h$ , avec  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $h(z) = \alpha z^q + O(z^{q+1})$  et  $|\alpha| \leq 1$  d'après une variante de l'inégalité de Schwarz. Donc  $|\phi'_V(0)|^q \leq |\phi'_U(0)|$ . D'après le lemme 5.3,  $\phi'_U(0) = \frac{2r^q |\ln(r^q)|}{1-r^{2q}}$ . Donc

$$r_u(r, q) \leq r_+(r, q) = \left( \frac{2r^q |\ln(r^q)|}{1-r^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$



*Estimation*

Soit  $\lambda > 0$ . Supposons maintenant que  $r \rightarrow 1$  et que  $-q \ln(r) \rightarrow \lambda$ , ce qui équivaut à dire que la distance hyperbolique entre  $r$  et  $r\zeta$  converge, vers

$$d_0 = -\ln \left( \tan \left( \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\lambda}{\pi} \right) \right) \right)$$

Alors  $r^q \rightarrow e^{-\lambda}$ . D'où  $\ln r_+(r, q) \sim \Lambda_+(\lambda) \ln(r)$  et  $\ln r_-(r, q) \sim \Lambda_-(\lambda) \ln(r)$ , avec

$$\Lambda_+(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2\lambda e^{-\lambda}}$$

et

$$\Lambda_-(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{(1 + e^{-\lambda})^2}{4e^{-\lambda}}$$

Nous avons de plus les propriétés suivantes :  $\forall \lambda > 0$ ,

$$\Lambda_+(\lambda) \in ]0, 1[ , \Lambda_-(\lambda) \in ]0, 1[$$

$$\Lambda_-(\lambda)/\Lambda_+(\lambda) \in ]1, 1.5[$$

Les fonctions  $\Lambda_+$  et  $\Lambda_-$  sont strictement croissantes en fonction de  $\lambda$ , tendent vers 0 en 0 avec une dérivée en 0 non nulle et non infinie, et tendent vers 1 en  $+\infty$ . Le quotient  $\Lambda_-/\Lambda_+$  tend vers 1.5 en 0 et vers 1 en  $+\infty$ , et d'après des expériences numériques il semble décroissant en fonction de  $\lambda$ .

## 6.6 Remarque sur le théorème de redressement des champs d'ellipses

Nous n'utilisons le théorème de redressement (théorème d'Ahlfors-Bers) que dans la section 5, et uniquement dans le cas où  $\frac{\ln q_{n+1}}{q_n} \rightarrow 0$ . Plus précisément il sert à démontrer le lemme 5.7. Il serait intéressant de voir si on peut démontrer ce lemme sans le théorème de redressement.

Dans le cas où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} \right)^2 = +\infty$$

on peut fournir une preuve que 0 est un point de Crémer sans utiliser le théorème de redressement : dans la preuve de la section 5, au lieu de passer au revêtement universel du complémentaire de  $q_n$  points dans  $\mathbb{D}$ , ne considérer qu'un seul point  $z(t)$ , normaliser en divisant par  $z(t)$  et passer au revêtement universel de  $r\mathbb{D}$  privé de  $\{1\}$  (pour  $r$  suffisamment grand, mais pas trop). Ceci dépend de façon analytique du paramètre  $t$ , contrairement aux revêtements universels.



Deuxième partie

Semi-continuité dans le  
théorème de Siegel-Brjuno, par  
la méthode de Yoccoz



---

## Introduction

Nous allons compléter le théorème de linéarisation des fonctions holomorphes  $f$  fixant 0 et dont la partie linéaire est une rotation irrationnelle (apériodique). Le théorème de Siegel-Brjuno affirme que si le nombre de rotation  $\theta$  satisfait une certaine condition diophantienne appelée condition de Brjuno, alors  $f$  admet conjugaison locale en 0 à sa partie linéaire. D'après [Y], le théorème de Brjuno donne une borne inférieure au rayon du disque de Siegel, en termes du rayon d'injectivité de  $f$ . Nous prouverons que, à  $\theta$  fixé satisfaisant la condition de Brjuno, sous l'hypothèse supplémentaire que  $f$  est arbitrairement proche de la rotation de même angle sur le disque unité  $\mathbb{D}$ , alors le disque de Siegel (domaine maximal de linéarisation) contient un sous disque de  $\mathbb{D}$  de rayon arbitrairement proche de 1, et sur lequel la linéarisation est arbitrairement proche de l'identité—nous ne tenterons pas ici d'estimer, et encore moins d'estimer finement, le rayon du disque de Siegel et la distance à l'identité de la linéarisation, en termes de  $\theta$  et de la proximité à la rotation—. De ceci, toujours à nombre de rotation de Brjuno fixé, on peut dériver des énoncés de semi-continuité du disque de Siegel. *Nous ne prétendons pas démontrer quelque chose de nouveau dans ce texte* : tout ceci est probablement déjà connu, et il se peut qu'il existe déjà des références pour cela. Nous donnons ici une preuve basée sur la méthode élaborée par Yoccoz dans [Y], dont il s'agit d'une application assez directe.

# 1. Définitions et énoncé

Nous nous basons uniquement sur le document [Y], qui présente la preuve de Yoccoz du théorème de Siegel-Brjuno. Comme il s'agit d'une variante, nous suivrons les notations qui y sont introduites, et nous conseillons au lecteur de s'y référer. Rappelons certaines d'entre elles. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on note  $\lambda = E(\alpha)$  où  $E(z) = e^{i2\pi z}$ . L'ensemble  $S_\lambda$  est l'ensemble des fonctions holomorphes univalentes  $f$  de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lambda$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , nous définissons un nouvel ensemble  $D_\lambda^\varepsilon$  : c'est l'ensemble des applications  $f$ , de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \lambda$  et  $\forall z \in \mathbb{D}$ ,  $|f(z) - R_\alpha(z)| < \varepsilon$ , où  $R_\alpha(z) = \lambda z$ . Contrairement à  $S_\lambda$ , nous ne demandons pas que  $f$  soit univalente sur  $\mathbb{D}$ . En fait, toute  $f \in D_\lambda^\varepsilon$  est automatiquement univalente sur un sous-disque de rayon qui tend vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. L'ensemble  $K_f$  désigne l'ensemble des points  $z$  de  $\mathbb{D}$  pour lesquels toute l'orbite future de  $z$  est définie, et ne sort pas de  $\mathbb{D}$ . La fonction  $f$  est linéarisable en 0 si et seulement si  $0 \in \overset{\circ}{K}_f$ . Le disque de Siegel  $U_f$  (qui n'est pas noté  $\Delta_f$  car il se peut qu'il soit strictement plus petit que le disque de Siegel d'un prolongement analytique de  $f$ ), est la composante connexe contenant 0 de l'intérieur de  $K_f$ , (avec la convention que  $U_f = \emptyset$  si  $0 \notin \overset{\circ}{K}_f$ ). Si  $U_f \neq \emptyset$ , la restriction  $f|_{U_f}$  est alors analytiquement conjuguée à la rotation d'angle  $2\pi\alpha$  sur  $\mathbb{D}$ . Nous appellerons  $H_f : C(f)\mathbb{D} \rightarrow U_f$  l'unique conjugaison analytique de  $R_\alpha : z \mapsto \lambda z$  à  $f$ , normalisée par  $H_f'(0) = 1$ , où  $C(f)$  est appelé capacité conforme (ou encore rayon conforme interne) de  $U_f$  en 0. Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des nombres de Brjuno, c'est à dire l'ensemble des irrationnels  $\alpha$  tels que  $B(\alpha) < +\infty$ , où  $B$  est la fonction de Brjuno :

$$B(\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n}$$

où  $q_n$  est le dénominateur de la  $n$ -ième réduite de  $\alpha$ .

## **Théorème 1 (Semi-continuité, énoncé normalisé)**

$(\forall \alpha \in \mathcal{B}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall f \in D_\lambda^\eta \text{ où } \lambda = E(\alpha))$ , le disque de Siegel de  $f$  contient le disque  $(1 - \varepsilon)\mathbb{D}$ , et  $\forall z \in (1 - \varepsilon)\mathbb{D}$ ,  $\left| H_f^{-1}(z) - z \right| < \varepsilon$ .

La tâche d'en dériver des énoncés de semi-continuité inférieure, géométriques et numériques, est laissée au lecteur, car ils dépendent du cadre. Donnons tout de même un exemple :

*Exemple :*

On munit la sphère de Riemann  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  d'une métrique sphérique. Soit  $\mathcal{R}_{\alpha,d}$  l'ensemble des des fraction rationnelles de degré  $d$  fixant 0 avec dérivée  $\lambda = E(\alpha)$ . On le munit de la topologie de la convergence uniforme des fonctions de  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . On munit l'ensemble  $\mathcal{D}$  des disques hyperboliques de  $\mathbb{S}^2$  (les ouverts connexes de complémentaire connexe non réduit à l'ensemble vide ou à un point) contenant 0, de la topologie de Carathéodory de point base 0. Si  $\alpha$  est un nombre de Brjuno, alors toute fonction  $F \in \mathcal{R}_{\alpha,d}$  possède un disque de Siegel en 0, noté  $\Delta \in \mathcal{D}$ . On note également  $\Psi$  la représentation conforme de  $\mathbb{D}$  dans  $\Delta$  envoyant 0 sur 0 avec une dérivée réelle positive (dans la carte  $\mathbb{C}$  de  $\mathbb{S}^2$ ), et  $r = \Psi'(0) > 0$  le rayon conforme interne en 0 de  $\Delta$ . La fonction  $\Psi$  appartient à l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{S}^2$ , sur lequel on met la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

**Proposition :** *Pour tout  $\alpha$  nombre de Brjuno et tout entier  $d$  supérieur ou égal à 2, la fonction  $\mathcal{R}_{\alpha,d} \rightarrow \mathcal{D} : F \mapsto \Delta$  est continue.*

*En particulier :*

- $F \mapsto \Psi$  est continue,
- $F \mapsto r$  est continue,
- $F \mapsto \mathbb{C} \setminus \Delta$  est semi-continue supérieurement pour la topologie de Hausdorff sur les compacts de  $\mathbb{S}^2$ .

**Preuve :** Soit  $F_0 \in \mathcal{R}_{\alpha,d}$ , et  $\Delta_0$  son disque de Siegel en 0. Prouver la continuité de  $F \mapsto \Delta$  en  $F_0$ , c'est montrer que

1. pour tout compact  $C$  de  $\Delta_0$ , il existe un voisinage de  $F_0$  tel que  $\Delta \supset C$ ,
2. pour tout ouvert connexe  $U$  contenant 0 et intersectant le complémentaire de  $\Delta_0$ , il existe un voisinage de  $F_0$  tel que  $U$  intersecte le complémentaire de  $\Delta$ .

Notons que le point 1. équivaut à la semi-continuité supérieure de  $F \mapsto \mathbb{S}^2 \setminus \Delta$  au sens de Hausdorff. Considérons les fonctions  $G = \Psi_0^{-1} \circ F \circ \Psi_0$ . Quand  $F \rightarrow F_0$ , alors  $G \rightarrow R_{\alpha,d}$ , au sens où pour tout compact  $C$  de  $\mathbb{D}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage de  $F_0$  pour lequel  $G$  est définie sur  $C$ , et y diffère de  $R_{\alpha,d}$  de moins de  $\varepsilon$ . D'autre part  $G$  fixe 0 avec même multiplicateur que  $F$ . On peut donc appliquer le théorème 1 sur tout sous-disque  $\lambda\mathbb{D}$  avec  $\lambda \in ]0, 1[$ , ce qui implique le point 1. par le changement de variable  $\Psi_0$  (car  $\Psi_0(\Delta(G)) \subset \Delta(F)$ ).

Quand au point 2., il provient des propriétés de base des ensembles de Julia : un tel ensemble connexe  $U$  rencontre le bord de  $\Delta_0$ , qui est inclus dans l'ensemble de Julia  $J_0$  de  $F_0$ . Or  $J$  varie de façon semi-continue inférieure en fonction de  $F$ . Donc pour  $F$  suffisamment proche de  $F_0$ ,  $U$  contient des points de  $J$ , donc du complémentaire de  $\Delta$ . ■

## 2. Preuve

Soit  $T_1(z) = z + 1$ . Soit  $\widehat{D}_\alpha$  l'ensemble des fonctions holomorphes  $f$  du demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$  vers  $\mathbb{C}$  telles que  $f \circ T_1 = T_1 \circ f$  et  $f(z) - z \rightarrow \alpha$  quand  $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$ . Soit  $\widehat{K}_f$  l'ensemble des points de  $\mathbb{H}$  dont l'orbite par  $f$  ne sort pas de  $\mathbb{H}$ , et  $\widehat{U}_f = E^{-1}(U_{\tilde{f}})$  où  $\tilde{f} \in D_{E(\alpha)}$  est l'application associée à  $f$ , c'est à dire telle que  $E \circ f = \tilde{f} \circ E$ . Soit  $\widehat{S}_\alpha$  l'ensemble des fonctions  $f \in \widehat{D}_\alpha$  qui sont de plus univalentes sur  $\mathbb{H}$ . Soit  $\widehat{D}_\alpha^\varepsilon$  (resp.  $\widehat{S}_\alpha^\varepsilon$ ) l'ensemble des  $f \in \widehat{D}_\alpha$  (resp.  $\widehat{S}_\alpha$ ) qui satisfont l'hypothèse supplémentaire :  $\forall z \in \mathbb{H}$ ,  $|f(z) - z - \alpha| < \varepsilon$ . Pour une fonction  $f \in \widehat{D}_\alpha$ , soit  $\widehat{K}_f$  l'ensemble des points de  $\mathbb{H}$  en lesquels toutes les itérées de  $f$  sont définies et restent dans  $\mathbb{H}$ .

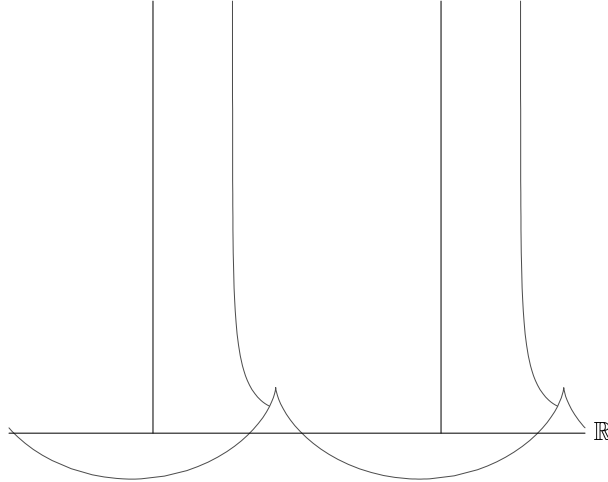


FIG. 2.1 – Exemple de fonction d'un certain  $\widehat{S}_\alpha$  : nous avons dessiné le demi-plan supérieur, un domaine fondamental de son quotient par  $\mathbb{Z}$ , et leurs images.

Pour prouver le théorème 1, il suffit de prouver la proposition suivante :

**Proposition 2.1**  $(\forall \alpha \in \mathcal{B}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall f \in \widehat{S}_\alpha^\eta)$ , tout  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\text{Im}(z) > \varepsilon$  a toutes ses itérées par  $f$  bien définies et dans  $\mathbb{H}$ .

La preuve que la proposition 2.1 implique le théorème 1 est élémentaire. Justifions-la cependant, avec une série de lemmes :



**Lemme 2.2** *Pour tous  $\varepsilon, \varepsilon' \in ]0, 1[$ , il existe  $\varepsilon'' < \varepsilon$  tel que pour tout disque topologique ouvert  $U$ , si  $(1 - \varepsilon'')\mathbb{D} \subset U \subset \mathbb{D}$ , alors  $\forall z \in (1 - \varepsilon)\mathbb{D}$ ,  $|h(z) - z| < \varepsilon'$ , où  $h$  est l'unique isomorphisme conforme de  $U$  vers un disque  $C\mathbb{D}$  tel que  $h(0) = 0$  et  $h'(0) = 1$ .*

**Lemme 2.3** *Soit  $\varepsilon < 1$ ,  $\alpha \in \mathcal{B}$  et  $\lambda = E(\alpha)$ . Posons  $\varepsilon' = \frac{-\ln(1 - \varepsilon)}{2\pi}$ . Si  $f \in D_\lambda^\varepsilon$ , alors il existe un application  $\hat{f} \in \hat{D}_\alpha^{\varepsilon'}$  telle que  $\forall z \in \mathbb{H}$ ,  $E(\hat{f}(z)) = f(E(z))$ .*

**Lemme 2.4** *Soient  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$  et  $u \in ]0, 1[$  tels que  $2\pi \frac{u}{1 - u^2} = \frac{1}{\varepsilon}$  (la correspondance est biunivoque). Si  $f \in \hat{D}_\alpha^\varepsilon$ , alors  $\forall h \geq h_0 = \frac{-\ln(u)}{2\pi}$ ,  $T_{ih}^{-1} \circ f \circ T_{ih} \in \hat{S}_\alpha^\varepsilon$ .*

Le lemme 2.2 est une conséquence directe du théorème de convergence de Carathéodory. Pour le lemme 2.4, écrire  $f(z) = z + \alpha + \varepsilon g(e^{i2\pi z})$ , où  $g$  est une application holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  envoyant 0 sur 0, ce qui fait que  $g'(z)$  est bornée par  $1/(1 - |z|^2)$ , et utiliser le fait que si une fonction holomorphe  $f$  de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifie  $|f'(z) - 1| < 1$ , alors elle est injective.

*Preuve de 2.1 :*

Rappelons quelques points et notations de [Y]. La condition  $B(\alpha) < +\infty$  est équivalente à  $\Phi(\alpha) < +\infty$ , où  $\Phi : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  est définie de la façon suivante. Pour  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , soit  $\alpha_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  la distance de  $\alpha$  aux entiers. Soit  $\alpha_n = A^n(\alpha_0)$ , où  $A(x)$  est la distance de  $1/x$  aux entiers,  $\beta_{-1} = 1$  et  $\beta_n = \alpha_0 \dots \alpha_n$ . Alors

$$\Phi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_{n-1} \ln(\alpha_n^{-1})$$

Rappelons que  $\lambda = E(\alpha) = e^{i2\pi\alpha}$ .

Nous utiliserons le théorème que nous voulons adapter :

**Théorème 2 (Siegel, Brjuno, Yoccoz)**  $(\exists C_0 > 0) (\forall \alpha \in \mathcal{B}) (\forall f \in S_\lambda)$ ,

$$-\ln C(f) < C_0 + \Phi(\alpha)$$

**Remarque :** Notons que d'après le théorème 1/4 de Koebe,  $U_f$  doit contenir  $\frac{C(f)}{4}\mathbb{D}$ . En d'autres termes, pour tout  $f \in \hat{S}_\alpha$ , l'ensemble  $\hat{U}_f$  contient le demi-plan " $\text{Im}(z) > \frac{1}{2\pi}(\Phi(\alpha) + C_0 + \ln 4)$ ".

Nous avons besoin d'adapter la renormalisation de [Y] à notre cas. Soit  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[\setminus \mathbb{Q}$ ,  $\varepsilon > 0$ , et soit  $f \in \hat{S}_\alpha^\varepsilon$ . Soit  $a$  la partie entière de  $1/\alpha$ . Nous supposons que la condition suivante est vérifiée :

$$(\mathcal{C}_{\varepsilon, \alpha}) : \varepsilon < \alpha/(a + 2) \text{ et } \varepsilon < 1/9$$

Puisque  $\varepsilon < \alpha/(a+2) \leq \alpha/4 < \alpha/3$ , on a :

**Proposition 2.5** *Sous les conditions précédentes, pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , l'angle entre la ligne horizontale et le segment  $[z, f(z)]$  est inférieur à  $\arcsin(1/3) < \pi/4$ .*

Comme on a supposé  $f \in \widehat{S}_\alpha^\varepsilon$ , on a en particulier  $f \in \widehat{D}_\alpha^\varepsilon$ . La fonction holomorphe  $p(z) = \frac{1}{\varepsilon}(f(z) - z - \alpha)$  est de donc module  $< 1$ , tend vers 0 quand  $\text{Im}(z)$  tend vers l'infini, et  $p \circ T_1 = p$ . On en déduit qu'il existe  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe, telle que  $g(0) = 0$ ,  $|g(z)| < 1$ , et  $p(z) = g(e^{i2\pi z})$ . Donc

$$f(z) = z + \alpha + \varepsilon g(e^{i2\pi z})$$

Comme  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , on en déduit que  $|g'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ . Comme d'autre part  $f'(z) = 1 + \varepsilon i2\pi e^{i2\pi z} g'(e^{i2\pi z})$ , on en déduit

$$|f'(z) - 1| \leq \varepsilon 2\pi \frac{u}{1-u^2}$$

où  $u = e^{-2\pi \text{Im}(z)}$ . Soit  $u_0 \in ]0, 1[$  l'unique valeur telle que  $\varepsilon 2\pi \frac{u_0}{1-u_0^2} = \varepsilon^{1/2}$ . Elle tend vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Soit  $c_1 = -\ln(u_0)/2\pi$ . La constante  $c_1 > 0$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > c_1 \Rightarrow |f'(z) - 1| \leq \varepsilon^{1/2}$$

Puisque  $\varepsilon^{1/2} < 1/3$ , on a

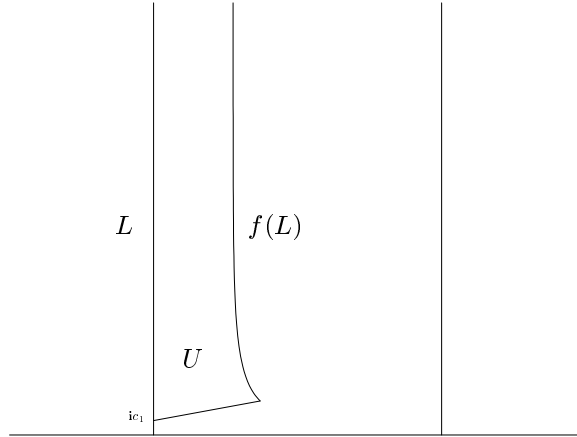
$$|\text{Arg } f'(z)| < \arcsin(1/3) < \frac{\pi}{4} \quad (2.1)$$

Donc en particulier,

**Proposition 2.6** *La courbe  $f(L)$  est lisse et ses tangentes font un angle  $< \pi/4$  avec la verticale.*

Tout cela implique que la réunion de la ligne  $L = ]ic_1, +i\infty[ \subset i\mathbb{R}$ , du segment  $[ic_1, f(ic_1)]$  de la courbe  $f(L)$  et du point  $\infty$  forment une courbe de Jordan sur la sphère de Riemann  $\mathbb{S}^2$ . Nous définissons  $U$  comme étant la composante connexe de son complémentaire contenant un voisinage à droite de  $L$ , et posons  $U_L = U \cup L$ .

Une autre conséquence de la majoration 2.1 est que  $f^{-1}(U)$  est un voisinage à gauche de  $L$ . Suivant [Y], nous définissons  $\mathcal{V}$  l'espace topologique obtenu à partir de  $\overline{U}$  en recollant  $L$  à  $f(L)$  par  $f$ , et notons  $i : \overline{U} \rightarrow \mathcal{V}$  la projection. L'espace  $\mathcal{V}$  est une variété topologique à bord, de bord  $i([ic_1, f(ic_1)])$  noté  $\partial\mathcal{V}$ , même si ce n'est pas à proprement parler une frontière. Nous noterons  $\overset{\circ}{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \setminus \partial\mathcal{V}$ . Nous pouvons munir  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  d'une structure analytique, en mettant sur l'ouvert  $U \cup L \cup f^{-1}(U)$  la relation d'équivalence induite par les relations  $z \sim f(z)$  pour tout  $z \in f^{-1}(U)$ . D'après [Y], il est facile de voir qu'il existe un isomorphisme analytique de  $\overset{\circ}{\mathcal{V}}$  vers  $\mathbb{D}^*$ , tendant

FIG. 2.2 – Le domaine  $U$ .

vers 0 quand  $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$  et se prolongeant aux bords en un homéomorphisme par un théorème de Carathéodory. Donc il existe un isomorphe de  $\mathcal{V}$  au demi-cylindre supérieur  $\mathbb{H}/\mathbb{Z}$ , tendant vers  $+\mathbf{i}\infty$  quand  $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$  et se prolongeant aux bords en un homéomorphisme de  $\mathcal{V}$  sur  $\overline{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}$ . Soit  $\phi$  la composée de la projection  $i : \overline{U} \rightarrow \mathcal{V}$  et de cet isomorphisme. La fonction  $\phi : \overline{U} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}$  est continue. Comme  $\overline{U}$  est simplement connexe, il existe un relevé  $K : \overline{U} \rightarrow \mathbb{H}$  de  $\phi$ . La fonction  $K$  ainsi définie est unique à post-composition près par une translation du plan de vecteur réel (via une post-composition de  $\phi$  par la même translation sur le cylindre). Nous choisisons  $K$  de sorte que  $K(\mathbf{i}c_1) = 0$ .

Nous avons maintenant besoin d'une estimation sur  $K$ . Pour cela, nous construisons un modèle  $\psi$  pour  $K^{-1}$ . Soit  $B_0 = \text{''Im}(z) \geq 0 \text{ et } \text{Re}(z) \in [0, 1]\text{''}$  et  $\psi : B_0 \rightarrow U$  définie par  $x + \mathbf{i}y \mapsto (1-x)\mathbf{i}w + xf(\mathbf{i}w)$ , où  $w = \alpha y + c_1$ . Ce modèle n'est pas holomorphe. Son jacobien est :

$$J = \begin{bmatrix} \text{Re}(f(\mathbf{i}w)) & -\alpha x \text{Im}(f'(\mathbf{i}w)) \\ \text{Im}(f(\mathbf{i}w)) - w & \alpha x \text{Re}(f'(\mathbf{i}w)) + (1-x)\alpha \end{bmatrix}$$

Le rapport de dilatation de l'application linéaire associée à une matrice  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  est une fonction continue de  $M$ , et vaut 1 pour  $\alpha I_2$ . Calculons

$$J - \alpha I_2 = \begin{bmatrix} \text{Re}(f) - \alpha & -\alpha x \text{Im}(f') \\ \text{Im}(f) - w & \alpha x (\text{Re}(f') - 1) \end{bmatrix}$$

où  $f$  et  $f'$  sont évaluées en  $\mathbf{i}w$ . Or  $|f(\mathbf{i}w) - \alpha - \mathbf{i}w| < \varepsilon$  et  $|f'(\mathbf{i}w) - 1| < \varepsilon^{1/2}$  puisque  $\text{Im}(w) \geq c_1$ . La distance de  $J$  à  $\alpha I_2$  (en terme du maximum de la valeur absolue des coefficients de la différence) est donc inférieure à  $\max(\varepsilon, \alpha \varepsilon^{1/2})$ . Donc, d'une part, la dilatation de  $J$  est bornée par une constante  $k = k(\varepsilon, \alpha) > 1$ , qui tend vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers zéro ( $\alpha$  fixé). D'autre part, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, la norme d'opérateur du jacobien de  $z \mapsto \psi(z) - \alpha z$  est  $< \alpha$ , ce qui fait

que  $\psi$  est injective : c'est un homéomorphisme  $k$ -quasiconforme de  $B_0$  dans  $\psi(B_0)$ . Les propositions 2.5 et 2.6 impliquent que  $\psi(B_0) = \overline{U}$ . La composée  $K \circ \psi$  est un homéomorphisme de  $B_0$  dans lui-même, fixant 0, 1 et  $+\mathbf{i}\infty$ , commutant avec  $T_1$  sur  $\mathbf{i}[0, +\infty[ \subset \mathbf{i}\mathbb{R}$ , et  $k$ -quasiconforme à l'intérieur. Il se projette par  $E : z \mapsto e^{\mathbf{i}2\pi z}$  en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{D}}$  dans lui-même, fixant 0 et 1, et  $k$ -quasiconforme à l'intérieur (car  $E(\mathbf{i}[0, +\infty[) = ]0, 1[$  et le segment  $]0, 1[$  est effaçable). Ce dernier est arbitrairement proche de l'identité pour la métrique euclidienne, pourvu que  $k$  soit suffisamment proche de 1. Ceci implique que

**Proposition 2.7** *Sur tout sous-cylindre de hauteur finie, la distance de  $K \circ \psi$  à l'identité pour la métrique euclidienne de  $\mathbb{H}$  est majorée par une constante dépendant uniquement  $k$  et du sous-cylindre choisi, et qui tend vers 0 quand  $k$  tend vers 1.*

D'autre part, quand  $\varepsilon$  est petit,  $\psi$  est arbitrairement proche (uniformément sur son ensemble de définition) de l'application linéaire  $z \mapsto \alpha z + \mathbf{i}c_1$  pour la topologie  $\mathbb{C}^1$ , et donc  $\psi^{-1}$  est arbitrairement proche de l'application linéaire  $z \mapsto (z - \mathbf{i}c_1)/\alpha$ .

Enfin, dans [Y], la proposition 1 de la section 3.4 (page 31) donne des constantes  $c_6 > 0$  et  $c'$  ( $c'$  dépend de  $\alpha$ ) telles que  $\forall z \in B_0$ , si  $\text{Im}(z) > c'$ , alors  $|\alpha DK(z) - 1| < \frac{1}{v^2 - 1}$  où  $v = 1 + \frac{1}{c_6}(\text{Im}(z) - c')$ . Ceci implique, par intégration, qu'indépendamment de  $\varepsilon$ , pour tout  $\zeta > 0$ , il existe  $h > 0$  et  $c \in \mathbb{C}$  tels que, sur le demi-cylindre " $\text{Im}(z) > h$ ", la distance de  $K$  à l'application linéaire  $z \mapsto z/\alpha + c$  est inférieure à  $\zeta$ . On déduit de tout cela qu'il existe  $\varepsilon'(\alpha, \varepsilon)$  telle que :

$$\forall z \in U, |K(z) - (z - \mathbf{i}c_1)/\alpha| < \varepsilon'(\varepsilon, \alpha) \quad (2.2)$$

où  $\varepsilon'(\varepsilon, \alpha) \rightarrow 0$  quand  $\alpha$  est fixé et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ainsi

$$\forall z \in K(U), |K^{-1}(z) - (\alpha z + \mathbf{i}c_1)| < \alpha \varepsilon'(\varepsilon, \alpha) \quad (2.3)$$

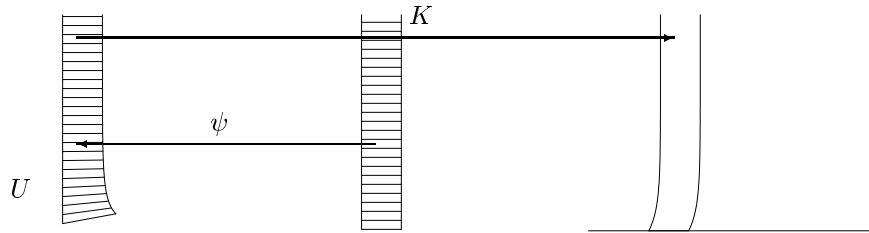


FIG. 2.3 – Les fonctions  $K$  et  $\psi$ .

Souvenons-nous que nous avons imposé  $(a + 2)\varepsilon < \alpha$ . Soit  $c_2 = c_1 + (a + 3)\varepsilon$ .

**Lemme 2.8** *Pour tout  $z \in U_L$  tel que  $\text{Im}(z) > c_2$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  avec  $1 \leq n \leq a + 2$  tel que  $f^n(z) \in T_1(U_L)$*

**Preuve :** En premier lieu, notons que pour tout  $z \in U_L$ ,  $\operatorname{Re}(z) < \alpha + \varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{1}{9} < 1$ , donc  $z$  est à gauche de  $T_1(L)$ . Les itérés  $z, f(z), \dots, f^{a+2}(z)$  existent et ont une partie imaginaire  $> c_1 + \varepsilon$ , ils sont donc plus hauts que  $ic_1$  et  $f(ic_1)$ , donc plus hauts que  $[ic_1, f(ic_1)]$ . L'itéré  $f^{a+2}(z)$  a une partie réelle  $> (a+2)(\alpha - \varepsilon) = (a+1)\alpha + \alpha - (a+2)\varepsilon > 1$ . Donc  $f^{a+2}(z)$  est à droite de  $T_1(f(L))$ . Soit  $0 \leq n \leq a+2$  le plus petit entier tel que  $f^n(z)$  est à droite de  $T_1(L)$  ou dessus :  $n \geq 1$ . Par définition,  $f^{n-1}(z)$  est à gauche de  $T_1(L)$ . Considérons le segment horizontal reliant ce point à  $L$ . Comme  $|f' - 1| < 1/3$  au dessus de  $c_1$ , l'image de ce segment est une courbe dont les tangentes font un angle  $< \pi/4$  avec l'horizontale. Cette courbe rejoint  $f^n(z)$  à  $T_1(f(L))$ , et par la proposition 2.6 les tangentes à  $T_1(f(L))$  font avec l'horizontale un angle  $> \pi/4$ . Ceci implique que la demi-droite horizontale  $T_{f^n(z)}(]-\infty, 0])$  part de  $f^n(z)$  et rejoint  $T_1(i\mathbb{R})$  sans croiser  $T_1(f(L))$ . D'autre part elle est située au dessus du segment  $T_1([ic_1, f(ic_1)])$  donc ne le croise pas. Donc  $f^n(z) \in T_1(U_L)$ . ■

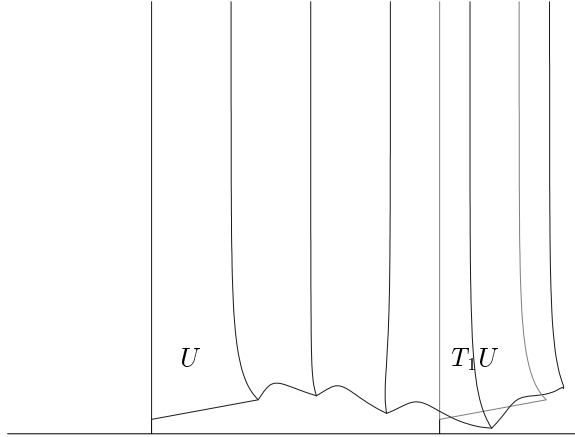


FIG. 2.4 – Le premier retour.

Nous définissons une application de premier retour  $r : U_{c_2} \rightarrow U_L$  où  $U_{c_2} = \{z \in U_L \mid \operatorname{Im}(z) > c_2\} \subset U_L$  par  $z \mapsto T_{-1}(f^n(z))$  où  $n = n(z) \geq 1$  est le plus petit entier tel que  $f^n(z) \in T_1(U_L)$ . La fonction  $r$  n'est pas continue. Cependant, vue comme une application de  $i(U_{c_2}) \subset \mathring{\mathcal{V}}$  dans  $\mathring{\mathcal{V}}$ , c'est une application continue et même holomorphe à l'intérieur. Donc via conjugaison par  $\phi|_{U_L} : U_L \rightarrow \overline{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}$ , on obtient une application holomorphe  $g : \phi(U_{c_2}) \rightarrow \mathbb{H}/\mathbb{Z}$ , où  $\phi(U_{c_2}) = K(U_{c_2})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{H}/\mathbb{Z}$ . Notons que d'après le lemme précédent,  $\forall z \in U_{c_2}$ ,  $n(z) \leq a+2$ , donc

$$|r(z) - (z + n(z)\alpha - 1)| < (a+2)\varepsilon \quad (2.4)$$

– Soit  $G_0$  un relevé de  $g : \pi \circ G_0 = g \circ \pi$  où  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est la projection naturelle, et un tel  $G_0$  est unique à post-composition près par une translation de vecteur dans  $\mathbb{Z}$ . En particulier  $G_0 \circ T_1 = T_k \circ G_0$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ . D'après la majoration 2.2, le domaine de définition de  $G_0$  contient le demi-plan “ $\operatorname{Im}(z) > d_1$ ” où

$d_1 = \varepsilon' + (c_2 - c_1)/\alpha$ , et  $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon, \alpha)$  a été introduit plus haut. Dans [Y], est démontré (section 3.5) que l'on peut choisir le relevé  $G_0$  de sorte que  $|G_0(z) - z - \alpha'| \rightarrow 0$  quand  $\text{Im}(z) \rightarrow +\infty$ , où  $\alpha' = -1/\alpha$ . En particulier, cela implique que  $k = 1$ .

– Soit  $G_1 = T_{-id_1} \circ G_0 \circ T_{id_1}$  restreint à  $\mathbb{H}$ . On vérifie avec les majorations 2.2, 2.3 et 2.4 que  $|G_1(z) - z - \alpha'| < \varepsilon''$ , où  $\varepsilon'' = 2\varepsilon' + (a+2)\frac{\varepsilon}{\alpha}$  (notons que  $\varepsilon'' \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $\alpha$  fixé). Donc  $G_1 \in \widehat{D}_{\alpha'}^{\varepsilon''}$ .

– Soit  $G_2 = T_{-id_2} \circ G_1 \circ T_{id_2}$  restreint à  $\mathbb{H}$ , où  $d_2 = d_2(\varepsilon'', \alpha')$  est la valeur de  $h_0$  donnée par le lemme 2.4 telle que  $G_2$  appartienne à  $\widehat{S}_{\alpha'}^{\varepsilon''}$ . Notons que  $d_2 \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  à  $\alpha$  fixé.

– Soit  $m \in \mathbb{Z}$  l'entier le plus proche de  $\alpha'$ ,  $G_3 = T_{-m} \circ G_2$  et  $\alpha'' = \alpha' - m$ . Donc  $G_3 \in \widehat{S}_{\alpha''}^{\varepsilon''}$ .

Si  $\alpha'' > 0$ , soit  $\mathcal{R}_\varepsilon(f) = G_3$ , et si  $\alpha'' < 0$ , soit  $\mathcal{R}_\varepsilon(f) = s^{-1} \circ G_3 \circ s$ , où  $s(z) = -\bar{z}$ . Soit  $K_2 = T_{-i(d_1+d_2)} \circ K$  dans le premier cas, et  $K_2 = s \circ T_{-i(d_1+d_2)} \circ K$  dans le second cas. Dans la notation  $\mathcal{R}_\varepsilon(f)$ , nous ne mentionnons pas  $\alpha$  car il est induit par  $f$ . On a

$$\mathcal{R}_\varepsilon(f) \in \widehat{S}_{A(\alpha)}^{\varepsilon''}$$

La fonction  $K_2$  (plus exactement  $\pi \circ K_2$ ) conjugue l'application de premier retour  $r$  restreinte à  $U_L \cap K_2^{-1}(\mathbb{H}) (\subset U_{c_2})$ , à l'application  $\mathcal{R}_\varepsilon(f)$  (plus exactement son quotient de  $\mathbb{H}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ). Soit  $c_3 = c_1 + (d_1 + d_2 + \varepsilon')\alpha > c_2$  :

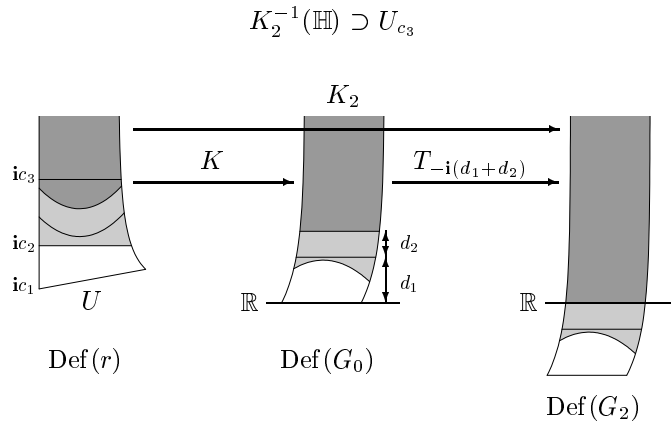


FIG. 2.5 – La fonction  $K_2$  et le domaine de définition de  $r$ , (réunion des gris clair et foncé), de  $G_0$  (réunion des gris clair et foncé), et celui de  $G_2$  (gris foncé seul).

Soit maintenant  $c_4 = c_3 + (a+2)\varepsilon$ .

**Lemme 2.9** *Pour tout  $z \in \mathbb{H}$  tel que  $\text{Re}(z) \in [-1, 0[$ , et  $\text{Im}(z) > c_4$ , alors  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq n \leq a+2$ ,  $f^n(z)$  existe,  $\text{Im}(f^n(z)) > c_3$  et  $f^n(z)$  appartient à  $U_L$ .*

La preuve est analogue à celle du lemme 2.8. Définissons un prolongement  $K_\varepsilon(f)$  de

$K_2$  sur “(  $\text{Re}(z) \in [-1, 0[$  et  $\text{Im}(z) > c_4$ ) ou ( $z \in U_L$  et  $\text{Im}(z) > c_3$ )”, en envoyant tout  $z$  tel que  $f^n(z) \in U_L$  sur  $K_2(f^n(z)) - n$ .

Considérons maintenant un point  $z$  tel que  $\text{Im}(z) > c_4$  et s'échappant de  $\mathbb{H}$  sous un certain itéré de  $f$ . Soit  $z' = z - k$  tel que  $\text{Re}(z') \in [-1, 0[$ , et  $z'' = f^n(z) \in U_L$  donné par le lemme 2.9. Le point  $z'$  s'échappe de  $\mathbb{H}$  sous la dynamique de  $f$ , donc en particulier  $z''$  s'échappe de  $U_{c_2}$  sous la dynamique de l'application de premier retour  $r$  : en effet pour tout point  $z \in U_{c_2}$ , les itérées situées entre  $z$  et son premier retour sont toutes à une hauteur  $> c_1 > 0$ . A fortiori,  $K_\varepsilon(f)(z'') = K_2(z'')$  s'échappe de  $\mathbb{H}$  sous la dynamique de  $\mathcal{R}_\varepsilon(f)$ . Mais  $K_\varepsilon(f)(z'') = K_\varepsilon(f)(z') + n$ . Donc  $K_\varepsilon(f)(z')$  s'échappe de  $\mathbb{H}$  sous la dynamique de  $\mathcal{R}_\varepsilon(f)$ . Nous avons également

$$\text{Im}(K_\varepsilon(f)(z')) > \frac{\text{Im}(z) - c_1}{\alpha} - \varepsilon' - (d_1 + d_2)$$

Souvenons-nous que  $c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, \varepsilon', \varepsilon''$  dépendent tous de  $\alpha$  et  $\varepsilon$ , et tendent vers 0 quand  $\alpha$  est fixé et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nous avons donc prouvé la :

**Proposition 2.10 (un pas)**  $\forall \alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $\forall \eta, \eta', \eta'' > 0$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  satisfaisant la condition  $\mathcal{C}_{\varepsilon, \alpha}$  et tel que  $\forall f \in \widehat{S}_\alpha^\varepsilon$ ,  $\mathcal{R}_\varepsilon(f) \in \widehat{S}_{A(\alpha)}^\eta$  et  $\forall h > \eta'$  et  $\forall z \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Re}(z) \in [-1, 0[$  et  $\text{Im}(z) > \alpha h + \eta''$ , alors  $z' = K_\varepsilon(f)(z)$  existe et  $\text{Im}(z') > h$ . Si de plus  $z \notin \widehat{K}_f$ , alors  $z' \notin \widehat{K}_{\mathcal{R}_\varepsilon(f)}$ .

Comme corollaire :

**Proposition 2.11 (n pas)**  $\forall \alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $\forall n \geq 1$ ,  $\forall \eta > 0$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  
– en notant  $\varepsilon_0 = \varepsilon$  et  $\varepsilon_n = \eta$ , il existe une suite  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} > 0$  telle que  $\forall i = 0, \dots, n-1$ , la condition  $\mathcal{C}_{\varepsilon_i, A^i(\alpha)}$  est vérifiée et telle que  $\forall f \in \widehat{S}_\alpha^\varepsilon$ ,  $\forall i \leq n$ ,  $f_i = \mathcal{R}_{\varepsilon_{i-1}}(\dots(\mathcal{R}_{\varepsilon_0}(f))) \in \widehat{S}_{A^i(\alpha)}^{\varepsilon_i}$ .  
–  $\forall f \in \widehat{S}_\alpha^\varepsilon$ , pour tout  $h > \eta$  et  $\forall z \in \mathbb{C}$  avec  $\text{Im}(z) > \alpha A(\alpha) \dots A^{n-1}(\alpha)h + \eta$ , soit  $z_0 = z + n_0$ , et  $z_{i+1} = K_{\varepsilon_i}(f_i)(z_i) + n_{i+1}$  avec  $n_i \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{Re}(z_i) \in [-1, 0[$ . Alors  $\text{Im}(z_n) > h$ . Si de plus  $z \notin \widehat{K}_f$ , alors  $z_n \notin \widehat{K}_{f_n}$ .

La proposition suivante est une conséquence presque immédiate de la définition  $\Phi$  : pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , posons  $\alpha_n = A^n(\alpha)$

**Proposition 2.12**  $\forall \alpha \in \mathcal{B}$ ,  $\forall C' > 0$ ,

$$(\Phi(\alpha_n) + C')\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Preuve** : En effet  $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(\Phi(\alpha_n) + C')$  est la somme de  $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}\Phi(\alpha_n)$  et de  $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}C'$ . Le premier terme est égal au reste au rang  $n$  de la somme définissant  $\Phi(\alpha)$ , et d'après l'hypothèse “ $\alpha \in \mathcal{B}$ ” cette somme est convergente. Pour le second terme, il suffit de remarquer que  $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} < 2^{-n}$ . ■

En utilisant la remarque suivant l'énoncé du théorème 2, ainsi que les propositions 2.11 et 2.12 avec  $C' = C_0 + \ln(4)$ , on conclut aisément la preuve de la proposition 2.1.

*Q.E.D.*



Troisième partie

Étude des objets limites de  
l'implosion parabolique



# Introduction

Nous définissons ici les fonctions et ensembles qui interviennent dans l'implosion parabolique, en tant qu'objets limites. Il s'agit des coordonnées de Fatou, des applications de Lavaurs, des applications de cornes (étendues), des ensembles de Julia-Lavaurs (aussi appelés ensembles de Julia enrichis), et des échiquiers paraboliques. Nous donnons les propriétés élémentaires de ces objets, en particulier de revêtement, de simple connexité, d'universalité. Nous prouvons enfin quelques lemmes raffinant le résultat de simple connexité des ensembles de Julia de  $\rho z + z^2$  où  $\rho$  est une racine de l'unité.

Une grande proportion, sinon tout, de la présente partie de la présente thèse existe disséminée dans la littérature mathématique; nous avons ici regroupé les résultat dont nous avons besoin, et les avons reformulés en employant une notation unifiée (mais qui ne prétend pas à la perfection).

Ces notions et résultats seront utilisés dans la partie "Disques de Siegel virtuels" ainsi que dans la partie "Un pas vers la mesure positive" de la présente thèse.

# 1. Revêtements ramifiés de degré infini et applications pleines

Notes :

- Les dénominations de cette section ne sont absolument pas standard ; les considérer comme provisoires. D'autre part les notions définies ici ont probablement déjà été définies et étudiées par d'autres personnes sous un autre nom.
- Nous rappelons la définition suivante. Deux applications  $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  et  $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ , où les quatre ensembles sont des espaces topologiques, sont dites *topologiquement équivalentes* si et seulement si il existe deux homéomorphismes  $\phi_X : X_1 \rightarrow X_2$  et  $\phi_Y : Y_1 \rightarrow Y_2$  tels que  $\phi_Y \circ f_1 = f_2 \circ \phi_X$ .
- $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  signifie  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $f(x) = y$
- Si les espaces sont pointés, c'est à dire  $f_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y_i, y_i)$ , alors on demande que  $\phi_X : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$  et  $\phi_Y : (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$ .
- Par définition, un disque topologique d'une surface topologique  $S$  est un ouvert de  $S$  homéomorphe au disque  $\mathbb{D}$ .

## 1.1 Revêtements ramifiés de degré infini

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces de Riemann (pas forcément connexes). Elles sont naturellement orientées par leur structure analytique. Nous noterons  $\cdot^d$  pour l'application  $z \mapsto z^d$ .

Nous dirons que deux applications de surfaces orientées sont  $t^+$  équivalentes si les équivalences préservent l'orientation.

*Topologiquement holomorphe*

**Définition (t.h)**

Une application  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est dite *topologiquement holomorphe* (t.h) quand :

- $f$  est continue,
- pour tout  $w \in S_1$ , il existe des voisinages  $V$  de  $w$  et  $W$  de  $f(w)$  sur lequel

$f : V \rightarrow W$  est  $t^+$  équivalente à une application holomorphe.

Conséquence de la localité : si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est t.h, alors pour tout ouvert  $U \subset S_1$ , la restriction  $f : U \rightarrow S_2$  est t.h. Nous disons que “ $f$  est t.h sur  $U$ ”. Plus généralement pour tout recouvrement ouvert de  $S_1$ ,  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est t.h si et seulement si elle l’est sur chaque élément du recouvrement. De même pour t.h’.

Indépendance relativement à l’espace d’arrivée : si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est à valeurs dans un ouvert  $U \subset S_2$ , alors  $f$  est t.h si et seulement si la restriction  $f : S_1 \rightarrow U$  est t.h. De même pour t.h’.

Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est t.h’, alors tout point  $w \in S_1$  admet un voisinage  $V$  tel que  $f : (V, w) \rightarrow (f(V), f(w))$  est  $t^+$  équivalente à  $\cdot^d = z \mapsto z^d : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ . Ce nombre  $d$  est indépendant de l’équivalence choisie, et est appelé *degré local* de  $f$  en  $w$ . Les points critiques de  $f$  sont les  $w \in S_1$  pour lesquels  $d \neq 1$ , et les valeurs critiques sont leurs images par  $f$ . On note  $VC(f)$  l’ensemble des valeurs critiques de  $f$ . Les points critiques sont les points où  $f$  n’est pas localement injective. Nous appellerons **t.h’** les t.h pour lesquels  $d$  n’est jamais nul, ce qui équivaut à dire que  $f$  n’est constante sur aucun ouvert, ou encore que  $f$  est ouverte.

Indication de la preuve de l’indépendance de  $d$  : étant donné  $w \in S_1$  et une équivalence locale à  $z \mapsto z^d$  il suffit de prouver que pour tout  $w \in S_1$ , tout point proche et différent de  $f(w)$  a exactement  $d$  images réciproques proches de  $w$ , car deux valeurs distinctes de  $d$  mèneraient à une contradiction.  $\square$

**Remarque** : Ici, par “tout point proche et différent de  $y_0$  a exactement  $n$  préimages par  $f$  proches de  $x_0$ ”, nous entendons  $(\forall W \in \mathcal{V}(y_0)) (\forall V \in \mathcal{V}(x_0)) (\exists W' \in \mathcal{V}(y_0)) (\exists V' \in \mathcal{V}(x_0))$  tels que  $W' \subset W$ ,  $V' \subset V$ , et  $\forall y \in W' \setminus \{y_0\}$ ,  $V' \cap f^{-1}(\{y\})$  possède exactement  $n$  éléments.

Notons que pour tout voisinage  $V$  de  $w$  pour lequel  $f : V \rightarrow f(V)$  est  $t^+$  équivalent à  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : z \mapsto z^d$ , on peut choisir pour  $\phi_Y$  n’importe quel homéomorphisme  $f(V) \rightarrow \mathbb{D}$  envoyant l’éventuelle valeur critique sur 0 et préservant l’orientation (l’existence de  $\phi_X$  adéquat étant une conséquence du théorème de relèvement). Plus généralement :

**Lemme 1.1** *Si  $f : (V, w_0) \rightarrow (f(V), f(w_0))$  est  $t^+$  équivalent à  $z \mapsto z^d : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ , alors pour tout disque topologique  $W \subset f(V)$  contenant  $f(w_0)$ , et pour tout homéomorphisme  $\phi_Y : W \rightarrow \mathbb{D}$  préservant l’orientation et envoyant  $f(w_0)$  sur 0, il existe un homéomorphisme  $\phi_X : f^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{D}$  préservant l’orientation, envoyant  $w_0$  sur 0, et tel que  $\phi_Y \circ f = \cdot^d \circ \phi_X$ .*

Cela implique que les propriétés t.h et t.h’ sont invariantes par composition, et les degrés locaux se multiplient.

Note : nous pouvons relâcher la condition t.h' en ne demandant plus aux équivalences de préserver l'orientation. Appelons cela *faiblement t.h'*. Il existe des applications ouvertes et continues de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui ne sont pas faiblement t.h', comme par exemple

$$x + iy \mapsto x \exp i \frac{y}{x}$$

(merci à S. Gouezel pour cet exemple).

### Revêtements ramifiés

**Définition (r.d.r)** Un *revêtement discrètement ramifié*, ou r.d.r, est une application  $f : S_1 \rightarrow S_2$ , telle que :

- $f$  est continue,
- pour tout  $w \in S_2$ , il existe un voisinage  $V$  de  $w$  et un homéomorphisme  $a : V \rightarrow \mathbb{D}$  qui préserve l'orientation et tel que  $a(w) = 0$  et pour toute composante connexe  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , il existe un homéomorphisme  $b_U : U \rightarrow \mathbb{D}$  qui préserve l'orientation et un entier  $d_U > 0$  tel que  $\forall w \in U, a \circ f|_U(w) = \cdot^{d_U} \circ b(w)$ .

Un tel voisinage  $V$  sera qualifié de *régulier*.

Un r.d.r est automatiquement t.h'.

**Définition (r.a.r)** Un *revêtement arbitrairement ramifié*, ou r.a.r, est une application  $f : S_1 \rightarrow S_2$ , telle que :

- $f$  est t.h',
- pour tout  $w \in S_2$ , il existe un voisinage  $V$  de  $w$  tel que pour toute composante connexe  $U$  de  $f^{-1}(V)$ ,  $f : U \rightarrow V$  est propre.

Un r.d.r est un cas particulier de r.a.r.

Notons que les r.d.r et les r.a.r ne sont pas stables par composition.

Nous aurons besoin dans la présente thèse la propriété suivante :

**Définition ( $\mathcal{E}$ )** Une application  $f : S_1 \rightarrow S_2$  a la propriété  $\mathcal{E}$ , si et seulement si :

- $f$  est t.h',
- pour tout disque topologique  $V \subset S_2$  et pour toute composante connexe  $U$  de  $f^{-1}(V)$ , si la restriction  $f : U \rightarrow V$  contient au plus une valeur critique, alors  $U$  est un disque topologique, et  $f : U \rightarrow V$  est t<sup>+</sup> équivalent à  $z \mapsto z^d : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  pour un certain  $d \in \mathbb{N}^*$ .

Malheureusement, la composition de deux fonctions  $\mathcal{E}$  n'est pas toujours  $\mathcal{E}$ . Nous introduisons donc la notion suivante :

### Définition (recouvrante)

Une application  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est *recouvrante* si et seulement si :

- $f$  est t.h',

– pour tout ouvert connexe  $V$  de  $S_2$  et pour toute composante connexe  $U$  de  $f^{-1}(V)$ ,  $f(U) = V$ .

**Lemme 1.2**

Soient  $f_1 : S_1 \rightarrow S_2$ ,  $f_2 : S_2 \rightarrow S_3$ , et  $f = f_2 \circ f_1$

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont recouvrantes, alors  $f$  l'est.

Si elles sont  $\mathcal{E}$  et recouvrantes, alors  $f$  aussi.

Dans ce lemme, il est important que l'ensemble d'arrivée de  $f_1$  coïncide avec celui de départ de  $f_2$ .

**Lemme 1.3** Soit  $S$  une surface de Riemann connexe et  $f : S \rightarrow \mathbb{D}$  une application t.h' (resp. holomorphe non constante) qui est propre et dont l'ensemble des valeurs critiques est inclus dans  $\{0\}$ . Alors  $S$  est homéomorphe (resp. isomorphe) à  $\mathbb{D}$ , et on peut choisir un homéomorphisme préservant l'orientation (resp. isomorphisme)  $\phi$  vérifiant :  $f = \cdot^d \circ \phi$ , pour un certain  $d \in \mathbb{N}^*$ .

Avec ce lemme, on voit que pour que  $f$  soit un r.d.r, il suffit (et il faut) que  $f$  soit t.h' et que chaque point  $w$  du domaine d'arrivée ait un voisinage  $V$  qui soit un disque topologique et tel que pour toute composante connexe  $U$  de  $f^{-1}(V)$ ,  $f : U \rightarrow V$  soit propre et non ramifiée au dessus des points de  $V \setminus \{w\}$ .

Ainsi les voisinages réguliers d'un point  $w$  sont exactement les disques topologiques ne contenant aucune valeur critique distincte de  $w$

Enfin, pour que  $f$  ait la propriété  $\mathcal{E}$ , il suffit (et il faut) que  $f$  soit t.h' et que pour tout disque topologique  $V \subset S_2$  et pour toute composante connexe  $U$  de  $f^{-1}(V)$  tel que  $f : U \rightarrow V$  a au plus une valeur critique, alors la restriction  $f : U \rightarrow V$  soit propre.

**Lemme 1.4** Un r.a.r est recouvrant et a la propriété  $\mathcal{E}$ .

**Corollaire 1.5** Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est un r.d.r.
2. (énoncé fort)  $f$  est recouvrant, a la propriété  $\mathcal{E}$ , et  $VC(f)$  n'a pas de point d'accumulation dans  $S_2$ .
3. (énoncé faible)  $VC(f)$  n'a pas de point d'accumulation dans  $S_2$  et tout point  $w \in S_2$  a un voisinage  $V$  tel que  $V \cap VC(f) \subset \{w\}$  et tel que pour toute composante  $U$  de  $f^{-1}(V)$ ,  $f : U \rightarrow V$  est propre.

Notons que la composée de deux r.d.r n'est pas nécessairement un r.d.r, contrairement au cas des revêtements ramifiés de degré fini.

**Proposition 1.6** Soient  $S_0, \dots, S_n$  des surfaces de Riemann,  $f_i : S_{i-1} \rightarrow S_i$  des r.d.r et soit  $f = f_n \circ \dots \circ f_1 : S_0 \rightarrow S_n$  leur composée. Alors  $f$  est un r.d.r si et seulement si l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est sans point d'accumulation dans  $S_n$ .

Cette proposition est une conséquence directe du critère 2 du corollaire 1.5 et du lemme 1.2.

Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est un r.d.r et  $C$  l'ensemble de ses valeurs critiques, alors  $C$  est fermé, donc  $f^{-1}(C)$  est fermé et la restriction  $f : S_1 \setminus f^{-1}(C) \rightarrow S_2 \setminus C$  est un revêtement, donc le théorème de relèvement s'y applique; en particulier les chemins et les homotopies peuvent être relevés au dessus de  $S_2 \setminus C$ .

La proposition suivante est élémentaire

**Proposition 1.7** Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est un r.d.r, alors pour tout ouvert  $V$  de  $\mathbb{S}^2$ , et pour toute union  $U$  de composante connexes de  $f^{-1}(V)$ ,  $f : U \rightarrow V$  est un r.d.r.

Nous dirons parfois qu'une application  $f$  est un r.d.r "au dessus de  $U$ " : cela signifie que la restriction  $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$  est un r.d.r.

**Proposition 1.8** Soient  $g : S_1 \rightarrow S_2$  et  $f : S_1 \rightarrow S_3$  deux applications t.h'. Supposons que  $g$  est surjective et qu'il existe une fonction  $h : S_2 \rightarrow S_3$  telle que  $f = h \circ g$ . Alors  $h$  est t.h' (donc continue).

**Preuve :** Par hypothèse, tout point de  $S_2$  est l'image par  $g$  d'un point de  $S_1$ .

1. En l'image d'un point non critique  $w_0$  de  $g$ , la fonction  $g$  admet un inverse local, ce qui implique immédiatement que  $h$  est t.h' en  $g(w_0)$ , de même degré local que  $f$  en  $w_0$ .

2. Si  $w_0$  est un point critique de  $g$ , alors soit  $U$  un voisinage de  $w_0$  qui ne contient aucun autre point critique de  $g$ , et tel que  $f : (U, w_0) \rightarrow (f(U), f(w_0))$  soit  $t^+$  équivalent à  $z \mapsto z^d : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$  pour un certain  $d \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $W = f(U)$  et  $V = g(U)$ . Notons que  $U \cap h^{-1}(f(w_0)) = \{g(w_0)\}$ . Du point 1, on déduit que  $h : V \setminus \{g(w_0)\} \rightarrow W \setminus \{f(w_0)\}$  est un homéomorphisme local. D'autre part,  $h : V \rightarrow W$  est propre, car  $f : U \rightarrow W$  est propre, et  $g : U \rightarrow V$  est continue. En particulier,  $h : V \setminus \{g(w_0)\} \rightarrow W \setminus \{f(w_0)\}$  est propre. C'est donc un revêtement de degré fini; on en déduit que  $h : (V, g(z_0)) \rightarrow (W, f(z_0))$  est équivalent à  $z \mapsto z^k : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour des raisons de degré local, l'équivalence doit préserver l'orientation. ■

**Proposition 1.9** Soient  $S_1, \tilde{S}_1$  et  $S_2$  des surfaces de Riemann,  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un r.d.r et  $\pi : S_1 \rightarrow \tilde{S}_1$  une application recouvrante (c'est par exemple le cas si  $\pi$  est un r.d.r). Supposons que  $\pi$  est surjective et qu'il existe une application  $\tilde{f} : \tilde{S}_1 \rightarrow S_2$  telle que  $f = \tilde{f} \circ \pi$ . Alors  $\tilde{f}$  est un r.d.r.



**Preuve :** Nous allons utiliser le critère 3 de la proposition 1.5.

Avec la proposition 1.8, nous savons que  $\tilde{f}$  est t.h'. Comme  $\pi$  est surjective, l'ensemble des valeurs critiques de  $\tilde{f}$  est inclus dans celui de  $f$ . Donc il est sans accumulation.

Soit  $U \subset S_2$  un disque topologique contenant au plus une valeur critique de  $\tilde{f}$  et  $V$  une composante connexe de  $\tilde{f}^{-1}(U)$ . Nous devons démontrer que  $\tilde{f} : V \rightarrow U$  est propre. Il existe une composante connexe  $W$  de  $f^{-1}(U)$  dont l'image par  $\pi$  est incluse dans  $V$ . Par hypothèse sur  $\pi$ , on a alors  $\pi(V) = W$ . Comme  $\pi$  est continue et comme  $f : W \rightarrow U$  est propre, on en déduit que  $\tilde{f} : V \rightarrow U$  est propre. ■

## 1.2 Applications pleines

**Définition (ensemble plein)** Un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  est *plein* si toutes ses composantes connexes sont simplement connexes.

Ceci équivaut à ce que  $\mathbb{S}^2 \setminus U$  soit connexe

**Définition (application pleine)** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une application topologiquement holomorphe (t.h). Alors  $f$  sera dite *pleine* si et seulement si  $U$  est plein.

Nous utiliserons la conséquence suivante du principe du maximum

**Lemme 1.10** *Soient  $U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{C}$  que nous supposons connexes et simplement connexes, et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une application t.h' (ou plus généralement continue et ouverte). Alors toutes les composantes connexes de  $f^{-1}(V)$  sont simplement connexes.*

Cela a la proposition suivante comme corollaire :

**Proposition 1.11** *Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est topologiquement holomorphe, et  $V$  et  $U$  sont des ouverts pleins de  $\mathbb{C}$ , alors l'ouvert  $f^{-1}(V)$  de  $\mathbb{C}$  est plein.*

**Corollaire 1.12** *La composée d'applications pleines est pleine.*

L'essence de ces notions est due à Douady, qui a introduit la notion de revêtement ramifié plein. Nous avons reformulé différemment ces idées.

## 2. Enrichissement parabolique dans la famille quadratique

Cette section définit les objets intervenant dans l'enrichissement parabolique, dont les ensembles de Julia-Lavaurs et les applications de cornes, Nous donnons également les premières propriétés de ces objets. Celles-ci sont déjà connues, mais les textes les mentionnant sont encore rares (la plupart ne traitant que le cas d'un seul pétale). Parmi ces textes, citons [O], [L], [D], [DH] (exposé XVI), [S], ... L'enrichissement parabolique désigne les limites rencontrées lors de l'*implosion parabolique* (terme qui désigne certaines perturbations d'une application ayant un point parabolique). Nous introduirons directement ces limites, sans traiter l'implosion qui les motive.

### 2.1 Pétales et coordonnées de Fatou

Soient  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q > 0$  des entiers premiers entre eux, et  $P(z) = e^{i2\pi p/q}z + z^2$ . Alors

$$P^q(z) = z + Cz^{q+1} + O(z^{q+2})$$

pour un certain nombre complexe  $C \neq 0$  (voir [DH]). Nous appelons *axes attractifs* les  $q$  demi-droites issues de 0 et définies par l'équation  $Cz^{q+1}/z \in \mathbb{R}_-$ . Les *axes répulsifs* sont les  $q$  demi-droites définies par l'équation  $Cz^{q+1}/z \in \mathbb{R}_+$ . Les *axes intermédiaires* sont les  $2q$  demi-droites définies par l'équation  $Cz^{q+1}/z \in i\mathbb{R}$ . Considérons les  $2q$  secteurs ouverts bornés par les axes intermédiaires. Ils sont appelés attractifs ou répulsifs, selon la nature de l'axe qu'ils contiennent. Soit la nouvelle variable

$$Z = \frac{-1}{qCz^q}.$$

Dans un secteur, ce changement de variable est bijectif. Il envoie un secteur attractif dans le demi-plan droit, et un secteur répulsif dans un demi-plan gauche. Dans ces nouvelles coordonnées,  $P$  a le développement suivant :

$$Z \mapsto Z + 1 + O(Z^{-1/q})$$

quand  $|Z| \rightarrow +\infty$  (notons que les points  $Z$  proches de  $]-\infty, 0]$  peuvent changer de secteur, cependant le développement est également valable pour ces points). Ainsi, pour un certain  $A > 0$  suffisamment grand, nous obtenons dans la coordonnée  $Z$  un ensemble stable en avant " $\text{Re}(z) > A$ ". Son image dans les coordonnées  $z$

est appelé *pétale attractif*. Il lui est associé l'axe attractif contenu dans le même secteur. De même, pour  $A > 0$  assez grand, l'ensemble d'équation " $\text{Re}(z) < -A$ " en coordonnées  $Z$  associée à un secteur répulsif définit un ensemble stable par un inverse local de  $P^q$  en 0, nommé *pétale répulsif*, et associé à l'axe répulsif contenu dans le même secteur. Le développement précédent permet de voir que l'orbite par  $P^q$  d'un point d'un pétale attractif tend vers 0 avec un argument tendant vers celui de l'axe attractif qui lui est associé (voir [CG], chapitre II, § 6). De même l'orbite par l'inverse local mentionné plus haut, d'un point d'un pétale répulsif tend vers 0 avec un argument tendant vers celui de l'axe répulsif qui lui est associé.

Note : les pétales défini dans ce texte diffèrent des pétales classiquement définis, en ce qu'ils sont plus petits. Les seconds seront appelés pétales étendus. Les pétales

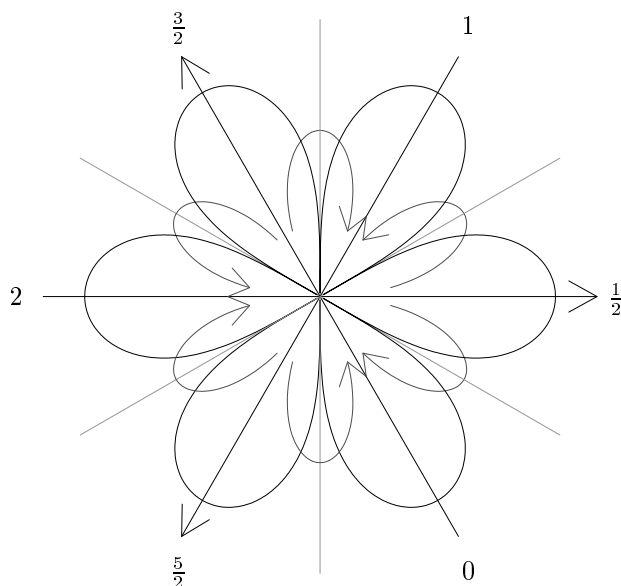


FIG. 2.1 – axes et pétales pour  $p/q = 1/3$

attractifs sont inclus dans  $\overset{\circ}{K}$ , et chacun est inclus dans une composante distincte (voir [DH], exposé IX, paragraphe II.1). Nous indexons les  $2q$  pétales attractifs et répulsifs par les nombre de la forme  $\frac{k}{2} \bmod q$  de la façon suivante : 0 est associé à l'unique pétale inclus dans la composante de  $\overset{\circ}{K}$  contenant le point critique (pour l'existence de ce pétale, voir [CG], chapitre III, théorème 2.3) ; les autres sont numérotés de façon croissante dans le sens trigonométrique. Chaque pétale est associé à un axe et nous lui attribuons le même index. On utilisera le symbole  $P_*$  pour les numérotés. Ainsi les pétales attractifs sont  $P_0, P_1, \dots, P_{q-1}$ , et les pétales répulsifs  $P_{\frac{1}{2}}, P_{\frac{3}{2}}, \dots, P_{\frac{2q-1}{2}}$ . Nous noterons  $K^i$  l'ensemble des points dont l'orbite tombe dans le pétale attractif d'index  $i$  sous l'itération de  $P^q$ . C'est un ouvert, réunion de composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}$  (car tout point de  $\overset{\circ}{K}$  tend vers 0 (voir la classification des composantes de Fatou dans [CG])), donc les  $K^i$  forment une partition en ouverts de

$\overset{\circ}{K}$ ), et tous ses points ont une orbite par  $P^q$  qui tend vers 0 tangentiellement à l'axe attractif d'index  $i$ . Le polynôme  $P$  envoie  $K^i$  dans  $K^{i+p}$  (car une suite tendant vers 0 tangentiellement à l'axe  $i$  a son image par  $P$  qui tend vers 0 tangentiellement à l'axe  $i+p$ , donc qui entre dans le pétale d'index  $i+p$ ). Par souci de clarté, nous désignerons autant que possible les indices attractifs par les symboles  $i$  ou ses dérivés ( $i', i_1, \dots$ ), et les indices répulsifs par le symbole  $j$  ou ses dérivés.

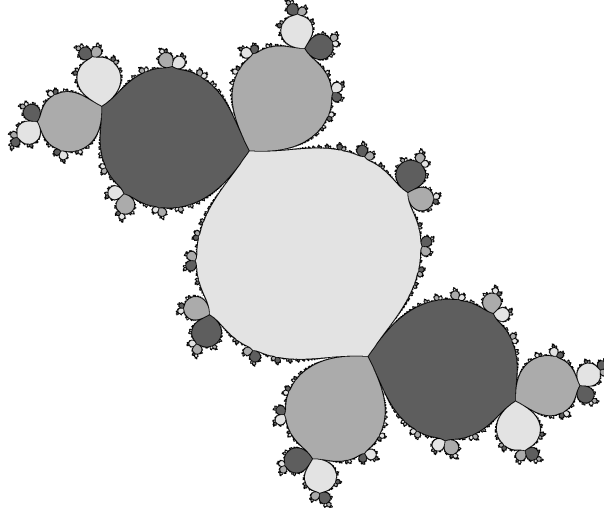


FIG. 2.2 – Exemple de partition de  $\overset{\circ}{K}$  en les  $K^i$  pour  $p/q = 1/3$

**Proposition 2.1** *Il existe des isomorphismes conformes  $\phi_{-,i}$ ,  $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , et  $\phi_{+,j}$ ,  $j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , chacun allant du pétale  $\mathcal{P}$  de même index dans un certain ouvert de  $\mathbb{C}$ , stable par  $T_1$  dans le cas attractif, par  $T_{-1}$  dans le cas répulsif, dont le quotient par  $T_1$  est le cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  entier, et conjuguant  $P^q$  à la translation  $T_1$  pour un pétale attractif, et la branche de  $(P^q)^{-1}$  laissant le pétale stable à la translation  $T_{-1}$  dans le cas répulsif. Ils sont uniques à post-composition près avec une translation.*

Voir [CG] pour plusieurs preuves de ceci. Nous donnons plus loin un énoncé précis et généralisé de l'unicité. Nous appellerons  $\psi_{+,j}$  la réciproque de  $\phi_{+,j}$ . Les fonctions  $\phi_{-,i}$  sont appelées *coordonnées de Fatou* et  $\psi_{+,j}$  *paramétrisations de Fatou*.

**Définition 2.2 (piège ouvert)** *Un piège ouvert pour  $f : U \rightarrow U$  est un ouvert  $A \subset U$  tel que*

$$f(A) \subset A, \text{ et}$$

$$\forall z \in U, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^n(z) \in A.$$

Nous ne demandons pas que  $A$  soit connexe.

Le pétale attractif d'index  $i$  est un piège ouvert pour  $P^q$  sur  $K^i$ , et l'image du pétale répulsif d'index  $j$  par  $\phi_{+,j}$  est un piège ouvert pour  $T_{-1}$  sur  $\mathbb{C}$ .

Les conjugaisons  $\phi_{-,i}$  et  $\phi_{+,j}$  restent des conjugaisons sur des pièges ouverts plus grand, nommés *pétales étendus*. Chaque pétale étendu est contenu dans le secteur de même index, et son image par  $z \mapsto Z = -1/qCz^q$  n'est pas seulement un demi-plan, mais a la propriété suivante :  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}$  tel qu'il contient l'ensemble " $\arg(Z - M) \in ] - \pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon[$ " dans le cas attractif, et l'ensemble " $\arg(M - Z) \in ] - \pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon[$ " dans le cas répulsif. On dira d'un ensemble avec cette propriété qu'il *contient des grands secteurs à l'infini* et un tel ensemble sera qualifié d'*étendu à l'infini* avec direction asymptotique  $\mathbb{R}_-$  dans le premier cas, et  $\mathbb{R}_+$  dans le second. Le pétale attractif étendu d'index  $i$  intersecte le pétale répulsif étendu d'index  $j = i + \frac{1}{2}$  et celui d'index  $j = i - \frac{1}{2}$ . La réunion du point parabolique 0 et des  $2q$  pétales étendus est un voisinage de 0.

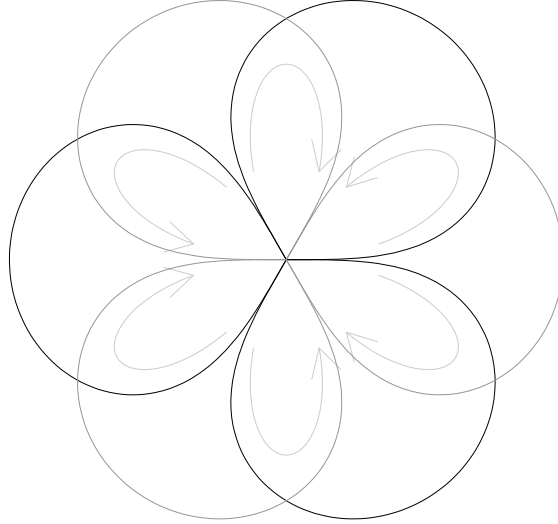


FIG. 2.3 – les pétales étendus

**Proposition 2.3 (Développement asymptotique)** *Il existe un changement de coordonnées  $z \mapsto w$ , défini au voisinage de 0, fixant ce dernier avec dérivée 1, et une constante  $a \in \mathbb{C}$ , tels que dans les coordonnées*

$$W = -1/qCw^q$$

*l'application  $W \mapsto \phi(z)$ , où  $\phi$  désigne l'un des  $\phi_{-,i}$  (resp.  $\phi_{+,j}$ ), a son domaine de définition qui contient un ensemble étendu à l'infini avec direction asymptotique  $\mathbb{R}_-$  (resp.  $\mathbb{R}_+$ ) et sur lequel*

$$\phi(z) = W + a \ln(W) + c + O(1/W)$$

*où  $c$  dépend de  $\phi$ . Comme corollaire, les images de ces ensembles sont étendus à l'infini avec même direction asymptotique.*

**Proposition 2.4 (complément)** *Il existe un unique nombre complexe  $A \in \mathbb{C}$  tel que le développement en série entière de  $P^q$  en 0 est formellement conjugué à*

$$z(1 + z^q + Az^{2q})$$

Posons  $\gamma = \frac{q+1}{2} - A$ . Alors dans la proposition précédente (2.3),

$$a = -\gamma$$

**Proposition 2.5** *Il existe des prolongements holomorphes  $\phi_{-,i} : K^i \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\psi_{+,j} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant les semi-conjugaisons suivantes :*

$$\begin{array}{ccc} K^i & \xrightarrow{P^q} & K^i \\ \downarrow \phi_{-,i} & & \downarrow \phi_{-,i} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{T_1} & \mathbb{C} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{P^q} & \mathbb{C} \\ \uparrow \psi_{+,j} & & \uparrow \psi_{+,j} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{T_1} & \mathbb{C} \end{array} \quad (2.1)$$

Ces prolongements ne sont plus des isomorphismes.

**Lemme 2.6**

$$\forall z_1, z_2 \in K^i, \left( \phi_{-,i}(z_1) = \phi_{-,i}(z_2) \iff \exists n \in \mathbb{N} P^{nq}(z_1) = P^{nq}(z_2) \right)$$

**Preuve :** Comme  $z_1, z_2 \in K^i$  et que le pétale d'index  $i$  est un piège, il existe  $n$  tel que  $P^{nq}(z_1)$  et  $P^{nq}(z_2)$  appartiennent à ce pétale. Par le diagramme 2.1,  $\phi_{-,i}(P^{nq}(z_1)) = \phi_{-,i}(z_1) + n$ , et  $\phi_{-,i}(P^{nq}(z_2)) = \phi_{-,i}(z_2) + n$ . Donc  $\phi_{-,i}(P^{nq}(z_1)) = \phi_{-,i}(P^{nq}(z_2))$ . Or  $\phi_{-,i}$  est injective sur le pétale. Donc  $P^{nq}(z_1) = P^{nq}(z_2)$ . ■

**Lemme 2.7** *Pour toute orbite inverse  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $z_n = P^q(z_{n+1})$  tendant vers 0, il existe un pétale répulsif  $P_j$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, z_n \in P_j$ . De plus, il existe un unique  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \psi_{+,j}(w - n)$ . Il est défini par  $w = n + \phi_{+,j}(z_n)$  pour n'importe quel  $n \geq N$ .*

**Preuve :** D'une part  $z_n \rightarrow 0$ . D'autre part, sur un petit voisinage de  $z$ ,  $P^q$  n'a qu'une branche inverse  $g$  envoyant 0 sur 0. Donc il existe un rang  $n_0$  tel que  $\forall n \geq n_0, z_{n+1} = g(z_n)$ . La réunion des  $q$  pétale répulsifs est un piège pour cette branche d'où la première affirmation. La valeur de  $w$  définie dans l'énoncé convient ( $\psi$  conjugué  $g|_{P_j}$  à  $T_{-1}$ ). L'unicité provient du fait que  $\phi_{+,j}(P_j)$  est un piège pour  $T_{-1}$  et  $\psi_{+,j}$  est injective. ■

**Proposition 2.8 (unicité des coordonnées de Fatou)**

*Pour tout  $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , pour tout piège ouvert  $A$  pour  $P^q : K^i \rightarrow K^i$ , et pour toute fonction  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\phi \circ P^q = T_1 \circ \phi$ , il existe une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle*

que  $f \circ T_1 = T_1 \circ f$  et  $\phi = f \circ \phi_{-,i}$  sur  $A$ . Si  $\phi$  est continue (resp. holomorphe), alors on peut prendre  $f$  continue (resp. holomorphe). Si  $\phi$  est holomorphe et si de plus il existe un piège ouvert  $A' \subset A$  tel que  $\phi$  est injective sur  $A'$ , alors  $f$  est une translation.

Pour tout  $j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , pour tout piège ouvert  $A$  pour  $T_{-1}$  sur  $\mathbb{C}$ , pour toute fonction  $\psi : A \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $P^q \circ \psi = \psi \circ T_1$ , et telle que pour tout  $w \in A$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $\psi(w - n)$  appartient à  $P_j$  le pétale répulsif d'index  $j$ , il existe une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui commute avec  $T_1$  et telle que  $\psi = \psi_{+,j} \circ f$  sur  $A$ . Si  $\phi$  est continue (resp. holomorphe), alors on peut prendre  $f$  continue (resp. holomorphe). Si  $\phi$  est holomorphe et si de plus il existe un piège ouvert  $A' \subset A$  tel que  $\psi$  est injective sur  $A'$ , alors  $f$  est une translation.

**Preuve :**

Cas attractif : soit  $B = \phi_{-,i}(A)$  : c'est un ouvert car  $\phi_{-,i}$  est holomorphe donc ouverte. Soit  $w \in B$ . Soient  $z_1, z_2 \in A$  tels que  $\phi_{-,i}(z_1) = \phi_{-,i}(z_2) = w$ . Alors d'après le lemme 2.6,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $P^{nq}(z_1) = P^{nq}(z_2)$ . D'où  $\phi(P^{nq}(z_1)) = \phi(P^{nq}(z_2))$ , donc d'après l'hypothèse sur  $\phi$ ,  $\phi(z_1) + n = \phi(z_2) + n$ , donc  $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ . On peut donc définir une application  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  par  $w \mapsto \phi(z)$  où  $z$  est n'importe quel élément de  $A \cap \phi_{-,i}^{-1}(w)$  (qui est non vide par définition de  $B$ ). Alors  $\phi(z) = f(w) = f(\phi_{-,i}(z))$ , ce que l'on voulait. On voit aisément que cette application  $f$  commute avec  $T_1$ , et est continue (resp. holomorphe) si  $\phi$  l'est. (Prendre l'image réciproque d'un ouvert pour la continuité. Pour l'holomorphicité, prendre des branches inverses locales de  $\phi_{-,i}$  si  $z$  est un point non critique de  $\phi_{-,i}$ ; si  $z$  est critique, on peut soit utiliser la continuité de  $f$  pour prouver qu'on est en présence d'une fausse singularité de  $f$ , soit utiliser la commutation à  $T_1$  et considérer  $n$  assez grand pour que  $w + n$  ne soit plus valeur critique de  $\phi_{-,i}$ .)

Notons que  $B/\mathbb{Z} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  : en effet, d'une part  $A$  est un piège pour  $P^q$ , d'autre part  $\pi \circ \phi_{-,i} : K^i \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est surjective (où  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  est le passage au quotient); donc pour tout point  $w \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , il existe  $z \in K^i$  tel que  $\phi_{-,i}(z) = w \bmod \mathbb{Z}$ , et  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $z' \stackrel{\text{def}}{=} P^{nq}(z) \in A$ , et alors  $\phi_{-,i}(z') = w \bmod \mathbb{Z}$ .

Il existe donc un unique prolongement commutant avec  $T_1$  de la fonction  $f$  à  $\mathbb{C}$  tout entier. Ce prolongement est continu (resp. holomorphe) si  $\phi$  l'est.

Supposons maintenant  $\phi$  holomorphe et injective sur  $A'$ . Soit  $B' = \phi_{-,i}(A')$ . Soient  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , et supposons  $f(w_1) = f(w_2)$ . Alors comme  $B'/\mathbb{Z} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , il existe  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tels que  $w_1 + n_1 \in B'$  et  $w_2 + n_2 \in B'$  (n'oublions pas que  $B'$  est stable par  $T_1$ ). Alors  $\phi(z_1) - n_1 = \phi(z_2) - n_2$  où  $z_1$  et  $z_2$  sont n'importe quelles préimages de  $w_1 + n_1$  et  $w_2 + n_2$  par  $\phi_{-,i}$ . Soit  $N \geq n_1$  et  $n_2$  assez grand pour que  $P^{Nq}(z_1)$  et  $P^{Nq}(z_2)$  soient dans  $A'$ . Alors  $\phi(P^{(N-n_1)q}(z_1)) = \phi(P^{(N-n_2)q}(z_2))$ , donc par injectivité  $P^{(N-n_1)q}(z_1) = P^{(N-n_2)q}(z_2)$ , donc  $\phi_{-,i}(z_1) + N - n_1 = \phi_{-,i}(z_2) + N - n_2$ , donc  $w_1 = w_2$ . Nous avons démontré que  $f$  est injective. Or une fonction holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  injective et commutant avec  $T_1$  est une translation.

Cas répulsif : pour  $w \in A$ , soit  $z_n = \psi(w - n)$ . D'après l'hypothèse de l'énoncé et le lemme 2.7, il existe un unique  $w' \in \mathbb{C}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \psi_{+,j}(w' - n)$ . On pose alors  $f(w) = w'$ . Cette fonction commute alors avec  $T_{-1}$  sur  $A$ . Elle a donc une unique extension à  $\mathbb{C}$  en une fonction qui commute avec  $T_1$ , que l'on notera  $f$ . Si  $\psi$  est continue (resp. holomorphe), montrons que  $f$  l'est également : il suffit de le vérifier sur  $A$ . Soit  $w \in A$ ,  $N$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $\psi(w - n) \in P_j$  et  $V$  un disque centré en  $w$ , inclus dans  $A$  et sur lequel  $\psi$  est à valeur dans le pétale  $P_j$ . Alors par récurrence, on montre que pour tout  $n \geq N$ ,  $\psi(V - n) \subset P_j$ . En effet si c'est vrai au rang  $n$ , alors comme  $\psi(w - (n+1)) \in P_j$  et comme  $V - n$  est connexe,  $\psi$  continue et pour tout  $v \in V - n$ ,  $P^q(\psi(v - 1)) = \psi(v) \in P_j$ , et que les branches de l'inverse de  $P^q$  sont disjointes sur  $P_j$ , c'est que  $\psi(v - 1) = g(\psi(v))$  où  $g$  est la branche laissant  $P_j$  stable. Donc sur  $V$ , on a  $f(w) = N + \phi_{+,j}(\psi(w - N))$ , ce qui démontre que  $f$  est continue (resp. holomorphe).

Si maintenant  $\psi$  est holomorphe sur  $A$  et injective sur  $A'$ , alors la formule définissant  $f$  implique que  $f$  est injective, et donc comme dans le cas attractif, c'est une translation. ■

Notons que cette construction est possible pour toute fraction rationnelle  $R$  ayant un point fixe multiple (ici on a détaillé le cas  $R = P^q$ ). En particulier les propositions précédentes restent vraies. Exploitions maintenant une des spécificités de  $P$  :

L'unicité des coordonnées de Fatou et l'action de  $P$  sur les directions attractives et répulsives (action qui est une translation de  $p$  sur les index  $i$  et  $j$ ), permettent de démontrer qu'il existe des nombres complexes  $\sigma_{-,i}$ ,  $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , tels que

$$\forall z \in K^i, \phi_{-,i+p} \circ P(z) = T_{\sigma_{-,i}} \circ \phi_{-,i}(z)$$

De la même façon, il existe des nombres complexes  $\sigma_{+,j}$ ,  $j - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \psi_{+,j+p} \circ T_{\sigma_{+,j}}(z) = P \circ \psi_{+,j}(z)$$

Les coordonnées de Fatou réalisent une semi-conjugaison entre  $P^q$  et  $T_1$ , donc

$$\sum \sigma_{-,i} = 1 \text{ and } \sum \sigma_{+,j} = 1.$$

Comme les coordonnées de Fatou sont définies à post-composition près par une translation, on peut les choisir de sorte que  $\forall i$ ,  $\sigma_{-,i} = 1/q$ . Elles sont alors déterminées dans leur ensemble à post-composition près simultanée par une même translation de vecteur complexe. De même on peut imposer que  $\forall j$ ,  $\sigma_{+,j} = 1/q$ . C'est ce que nous supposons dorénavant.



## 2.2 Définition des applications de cornes et de Lavaurs

Nous distinguerons  $2q$  copies de  $\mathbb{C}$  portant les coordonnées de Fatou, chacune associée à un pétale, en les indexant avec le même symbole. Soit  $\sigma \in \mathbb{C}$  quelconque, appelé *phase*. Soit  $\nu \in \{-1, 1\}$  : ce nombre désigne le sens de l'implosion. Son utilité n'apparaît vraiment qu'avec les objets perturbés de l'implosion parabolique (que nous n'étudions pas ici), car les objets limites, eux, ne dépendent pratiquement pas de  $\nu$ . On a un diagramme commutatif avec 4 lignes, une infinité bilatérale de colonnes et horizontalement périodique de période  $q$  :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{P} & K^3 & \xrightarrow{P} & K^0 & \xrightarrow{P} & K^2 & \xrightarrow{P} & K^4 & \xrightarrow{P} & K^1 & \xrightarrow{P} & \cdots \\
 & & \downarrow \phi_{-,3} & & \downarrow \phi_{-,0} & & \downarrow \phi_{-,2} & & \downarrow \phi_{-,4} & & \downarrow \phi_{-,1} & & \\
 \cdots & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_3 & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_0 & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_2 & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_4 & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_1 & \xrightarrow{1/q} & \cdots \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \\
 \cdots & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{7/2} & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{1/2} & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{5/2} & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{9/2} & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{3/2} & \xrightarrow{1/q} & \cdots \\
 & & \downarrow \psi_{+,\frac{7}{2}} & & \downarrow \psi_{+,\frac{1}{2}} & & \downarrow \psi_{+,\frac{5}{2}} & & \downarrow \psi_{+,\frac{9}{2}} & & \downarrow \psi_{+,\frac{3}{2}} & & \\
 \cdots & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \cdots
 \end{array}$$

FIG. 2.4 – exemple de diagramme pour  $p/q = 2/5$  et  $\nu = 1$  ; une flèche portant le nombre complexe  $\sigma$  figure  $T_\sigma$

Plus précisément, ce diagramme est indexé par  $\mathbb{Z} \times \{1, 2, 3, 4\}$ . L'ensemble figurant en  $(n, i)$ , est  $K^{np}$  si  $i = 1$ ,  $\mathbb{C}_n$  si  $i = 2$ ,  $\mathbb{C}_{n+\nu/2}$  si  $i = 3$ , et  $\mathbb{C}$  si  $i = 4$ . Les flèches horizontales vont de  $(n, i)$  vers  $(n+1, i)$  et sont  $P$  si  $i = 1$  ou  $i = 4$ , et la translation de vecteur  $1/q$  si  $i = 2$  ou  $i = 3$ . Les flèches verticales vont de  $(n, i)$  vers  $(n, i+1)$  et sont  $\phi_{-,np}$  si  $i = 1$ , la translation de vecteur  $\sigma$  si  $i = 2$ , et  $\psi_{+,np+\nu/2}$  si  $i = 3$ .

Rappelons qu'il reste un degré de liberté complexe dans le choix des  $\phi_{-,i}$  et un dans le choix des  $\psi_{+,j}$ . Si on les modifie, il faut modifier le nombre complexe  $\sigma$  pour garder les mêmes composées des flèches verticales. Notons également que les ensembles figurant dans les première et dernière lignes font partie du même plan complexe, le plan dynamique de  $P$ .

Nous allons considérer des sortes d'applications de premier retour le long de ce diagramme : les applications de Lavaurs et les applications de cornes.

Les *applications de Lavaurs* sont les applications  $g_\sigma = g_{\nu,\sigma}$  définies par (rappelons

que  $\nu \in \{-1, 1\}$  désigne le sens de l'implosion)

$$g_{\nu, \sigma} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\forall z \in K^i, g_{\nu, \sigma}(z) = \psi_{+, i + \frac{\nu}{2}} \circ T_{\sigma} \circ \phi_{-, i}(z).$$

Nous avons simplement suivi les verticales du diagramme, et réuni ces  $q$  applications en une seule. Puisque le diagramme de la figure 2.4 commute, nous avons

$$g_{\nu, \sigma} \circ P = P \circ g_{\nu, \sigma}.$$

Pour les applications de cornes, on part d'un ensemble  $\mathbb{C}_j$  de la troisième ligne, on suit la flèche verticale  $\psi_{+, j}$  correspondante, et si on arrive dans un  $K^i$ , on suit la flèche verticale  $\phi_{-, i}$  correspondante, puis la flèche verticale  $\sigma$  pour se retrouver sur la troisième ligne; enfin, on suit les flèches horizontales de la troisième ligne, pour se retrouver dans  $\mathbb{C}_j$ . Soyons précis : pour  $j - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , soit  $K\mathcal{F}_j = \psi_{+, j}^{-1}(K)$ ,  $K^i\mathcal{F}_j = \psi_{+, j}^{-1}(K^i)$  et  $J\mathcal{F}_j = \psi_{+, j}^{-1}(J)$ . Puisque  $J = \partial K$  et  $\psi_{+, j}$  est continue et ouverte,  $J\mathcal{F}_j$  est le bord de  $K\mathcal{F}_j$ . Soient  $j$  et  $j'$  dans  $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , et  $d_{j, j'} \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq d_{j, j'} < q$ , tels que  $j' \equiv j + d_{j, j'} p \pmod{q}$ . Alors  $T_{d_{j, j'}/q}$  est le premier retour horizontal de  $\mathbb{C}_j$  vers  $\mathbb{C}_{j'}$ . Les *applications de cornes* sont les applications  $h_{\sigma, j} = h_{\nu, \sigma, j}$ , où  $j - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , définies par (rappelons que  $\nu \in \{-1, 1\}$ )

$$h_{\nu, \sigma, j} = \phi_{\div, j} \circ \psi_{+, j} : \overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j \rightarrow \mathbb{C}_j$$

où la fonction  $\phi_{\div, j} = \phi_{\div, \nu, \sigma, j}$  est définie par

$$\phi_{\div, j} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}_j$$

$$\forall z \in K^i, \phi_{\div, j}(z) = T_{\frac{1}{q}d_{i + \frac{\nu}{2}, j}} \circ T_{\sigma} \circ \phi_{-, i}(z)$$

Nous avons les égalités (sortes de semi-conjugaisons)

$$\forall z \in K^i\mathcal{F}_j, \psi_{+, j} \circ h_{\nu, \sigma, j}(z) = P^{d_{i + \frac{\nu}{2}, j}}(g_{\nu, \sigma} \circ \psi_{+, j}(z))$$

Nous avons également les conjugaisons

$$h_{\nu, \sigma, j+p} \circ T_{1/q} = T_{1/q} \circ h_{\nu, \sigma, j}$$

Mentionnons la propriété suivante

$$\forall z \in K^i, \phi_{\div, j} \circ P(z) = T_k \circ \phi_{\div, j}(z)$$

avec  $k = 1$  si  $i = j - \nu/2$ , et  $k = 0$  sinon.

## 2.3 Propriétés de revêtement

Cette section est une reformulation des travaux de Douady [D], Lavaurs [L] et Shishikura [S].

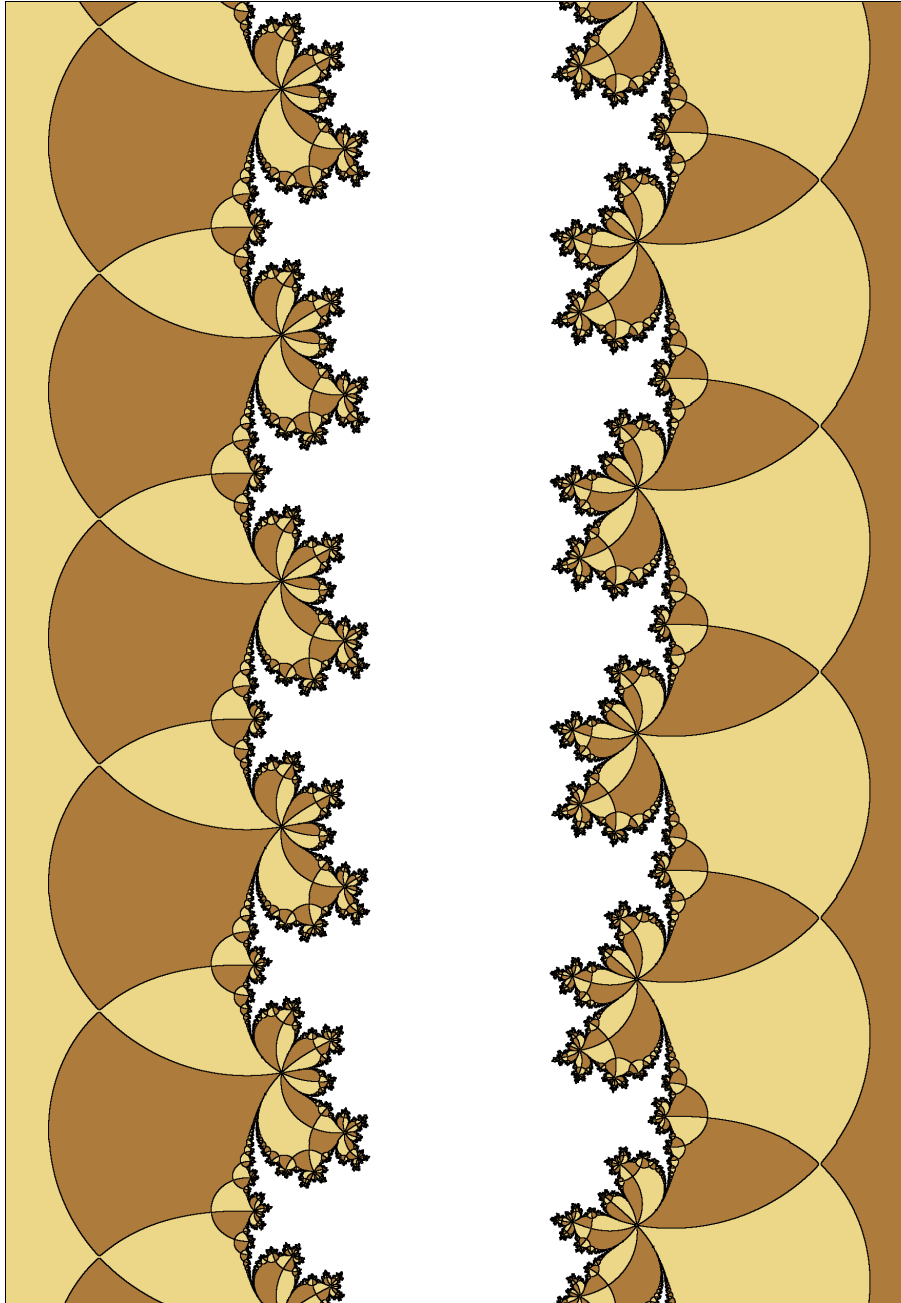


FIG. 2.5 – l'ensemble  $K\mathcal{F}$ , et son échiquier parabolique (voir section 3) la figure est tournée de 90 degrés

Nous fixons maintenant des valeurs de  $\nu$ ,  $\sigma$  et  $j$ , et nous les omettrons en tant qu'indices :  $h = h_{\nu,\sigma,j}$ ,  $K\mathcal{F} = K\mathcal{F}_j$ , ...

Rappelons que l'on appelle valeurs postcritiques de  $P$  les  $P^n(c)$  où  $n \geq 1$  et  $c$  est le point critique de  $P$ , et points précritiques de  $P$  la réunion des  $P^{-n}(c)$  où  $n \geq 0$ . Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des définitions.

**Proposition 2.9**

- Les valeurs critiques de  $\psi_{+,j}$  sont les valeurs postcritiques de  $P$ .
- Les points critiques de  $\phi_{-,i}$  sont les points précritiques de  $P$  appartenant à  $K^i$ .
- Les points critiques de  $\phi_{\dot{-},j}$  sont les points précritiques de  $P$ .
- Les valeurs critiques de  $\phi_{\dot{-},j}$  sont les points de  $v - \mathbb{N}$ , où  $v = \phi_{\dot{-},j}(c)$  et  $c$  est le point critique de  $P$ .
- Les valeurs critiques de  $h$  sont les points de  $v + \mathbb{Z}$ .

Attention, un point qui s'envoie sur une valeur critique n'est pas nécessairement critique.

Pour une fraction rationnelle  $F$  ayant un point périodique parabolique, on peut également définir des pétales et des coordonnées de Fatou sur ces pétales, et prolonger les coordonnées de Fatou attractives en des fonctions  $\phi_-$  à tout le bassin d'attraction du pétale pour  $F^k$  (où  $F^k$  est le plus petit itéré de  $F$  qui laisse le pétale stable). Il existe un ensemble fini  $A$  tel que  $\phi_-$  a pour ensemble de valeurs critiques  $A - \mathbb{N}$ . On a alors (voir la section 1 pour la définition de r.d.r et de  $\mathcal{E}$ ) :

**Proposition 2.10** *La coordonnée de Fatou attractive étendue  $\phi_-$  associée à un pétale attractif  $\mathcal{P}$  d'un point périodique parabolique d'une fraction rationnelle  $F$  est un r.d.r du bassin de ce pétale vers  $\mathbb{C}$ .*

**Preuve** : Soit  $w \in \mathbb{C}$ . Quitte à remplacer  $F$  par  $F^k$ , nous supposons que le pétale est stable par  $F$  et que  $\phi_-$  conjugue  $F$  à  $T_1$  sur le bassin. Comme l'ensemble des valeurs critiques de  $\phi_-$  est sans accumulation dans  $\mathbb{C}$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B = B(w, \varepsilon)$  ne contient pas de valeur critique de  $\phi_-$ , hormis peut-être une en son centre. Nous allons montrer que  $B$  est un voisinage régulier de  $w$  pour  $\phi_-$ .

Soit  $U = \phi_-(\mathcal{P})$ .  $U$  étant un piège ouvert pour  $T_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , un argument de compacité prouve qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $\text{Adh}(T_n(B)) \subset U$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $\phi_-^{-1}(B)$ . Soit  $z \in C$ . Alors il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $F^m(z) \in \mathcal{P}$ . Nous pouvons supposer  $m \geq N$ , de sorte que  $T_m(B) \subset U$ . Nous avons l'équation  $\phi_- = T_{-m} \circ \phi_- \circ F^m$ . De façon évidente,  $T_m$  est un isomorphisme de  $B$  sur  $T_m(B)$ . Soit  $D = \phi_-^{-1}(T_m(B)) \cap \mathcal{P}$ . Alors  $\phi_-$  est un isomorphisme de  $D$  sur  $T_m(B)$ , et  $D$  est une composante connexe de  $\phi_-^{-1}(T_m(B))$ . Par conséquent  $F^m(C) \subset D$ . On déduit de cela et de l'équation que  $C$  est une composante connexe de  $F^{-m}(D)$ . Or  $F$  est un revêtement ramifié de degré fini, donc  $F^m$  vérifie la

propriété  $\mathcal{E}$  (voir section 1). Il suffit donc d'appliquer cette propriété à  $D$ , qui contient au plus une valeur critique de  $F^m$  : en effet, une telle valeur s'envoie par l'isomorphisme  $T_{-m} \circ \phi_-|_D$  sur une valeur critique de  $\phi_-$  dans  $B$ , or  $B$  en contient au plus une. ■

Par conséquent,  $\phi_{-,i}(K^i) = \mathbb{C}$ , et c'est le cas de l'image de n'importe quelle composante connexe de  $K^i$ .

**Corollaire 2.11** *La fonction  $\phi_{\dot{+},j} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}$  est un r.d.r.*

La preuve de la proposition suivante est inspirée de [S], § 4.5.

**Proposition 2.12** *La fonction  $\psi_{+,j} : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  est un r.d.r, où  $S = \mathbb{C} \setminus \psi_{+,j}^{-1}(\{0\})$  ( $0$  est le point parabolique de  $P$ ).*

**Preuve :** Notons que l'ensemble des valeurs postcritiques de  $P$  est sans accumulation dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , puisque l'orbite de l'unique point critique de  $P$  tend vers 0. Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\overline{B}$  ne contienne ni  $\{0\}$  ni aucune valeur postcritique de  $P^q$  hormis peut-être  $z$  lui-même, où  $B = B(z, \varepsilon)$ . Montrons que  $B$  est un voisinage régulier de  $z$  pour  $\psi_{+,j}$ .

Soit  $k \geq 1$  tel que  $P^{kq}(c) = z$  si  $z$  est postcritique et  $k = 0$  sinon. Soit  $B'$  une boule de centre  $z$ , contenant  $\overline{B}$  et évitant 0 ainsi que les valeurs postcritiques de  $P^q$  autres que  $z$ . Pour  $C$  composante connexe de  $\psi_{+,j}^{-1}(B)$ , nous voulons montrer que  $\psi_{+,j} : C \rightarrow B$  est topologiquement équivalent (cf. section 1) à un certain  $z \mapsto z^d$ . Soit  $w \in C$  (on ne demande pas que  $\psi_{+,j}$  envoie  $w$  sur  $z$ ). Soit  $z_n = \psi_{+,j}(w - n)$ ,  $B'_n$  la composante connexe de  $P^{-nq}(B')$  contenant  $z_n$ , et  $B_n$  la composante connexe de  $P^{-nq}(B)$  contenant  $z_n$ . On a  $\overline{B}_n \subset B'_n$ ,  $P^q(B'_{n+1}) = B'_n$  et  $P^q(B_{n+1}) = B_n$ . Puisque  $P^q$  est un revêtement ramifié de degré fini, donc un r.d.r, il vérifie la propriété  $\mathcal{E}$ , donc  $B'_n$  est simplement connexe. De plus pour  $n \geq k$ ,  $B'_n$  ne contient aucune valeur critique de  $P^q$ , donc  $P^{(n-k)q} : B'_n \rightarrow B'_k$  est un isomorphisme. Soit  $g_n : B'_k \rightarrow B'_n$  son inverse. D'après le lemme 2.7, à partir d'un certain rang  $z_n \in P_j$  et  $z_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc pour  $n \geq k$ ,  $g_n$  est injective, évite 0, et  $g_n(z_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $g_n$  tend vers 0 uniformément sur tout compact de  $B'_k$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc tout compact de  $B'_k$  finit par avoir son image incluse dans  $P_j$ . C'est donc le cas de  $B_k$  :

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, B_n \subset P_j$$

On en déduit que  $C - N = \phi_{+,j}(B_N)$ , donc que  $\psi_{+,j}$  est un isomorphisme de  $C - N$  dans  $B_N$ . D'où le résultat en utilisant l'équation  $\psi_{+,j} = P^{Nq} \circ \psi_{+,j} \circ T_{-N}$ , et le fait que  $P^{Nq}$  vérifie la propriété  $\mathcal{E}$ . ■

Cette preuve s'adapte à tout point périodique parabolique  $\beta$  d'une fraction rationnelle  $F$  en remplaçant le singleton  $\{0\}$  par l'ensemble  $X = EUV'$ , où  $E$  est l'éventuel

ensemble exceptionnel de  $F$ ,  $V$  l'ensemble des valeurs postcritiques de  $F$  et  $V'$  est l'ensemble dérivé de  $V$  (l'ensemble des points d'accumulation de  $V$  dans  $\mathbb{C}$ ).

**Lemme 2.13**

$$\psi_{+,j}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

**Preuve :** L'image de  $\psi_{+,j}$  est invariante par  $P^q$  et ouverte. Elle contient également au moins un point de  $J$  (en effet, la réunion des pétales attractif et répulsifs, et du point parabolique 0, recouvre un voisinage de 0, or 0 étant parabolique, il appartient à  $J$ , et  $J$  ne possède pas de point isolé). Or pour tout ouvert rencontrant  $J$ , la réunion de ses images itérées recouvre  $\mathbb{C}$ . (Voir [CG] pour les propriétés élémentaires des ensembles de Julia) ■

Dans le cas plus général d'un point périodique parabolique d'une fraction rationnelle, l'image est  $\mathbb{S}^2 \setminus E$ , où  $E$  est l'éventuel ensemble exceptionnel.

**Remarque :** Cette proposition implique que  $\psi_{+,j}$  est un r.d.r de chaque composante connexe de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j$  vers une composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$ .

**Proposition 2.14** *La fonction  $h : \overset{\circ}{K}\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$  est un r.d.r.*

**Preuve :** C'est un corollaire immédiat des deux propositions précédentes, sachant que  $h = \phi_{\pm,j} \circ \psi_{+,j}|_S$ , puisque l'ensemble de définition de  $\phi_{\pm,j}$  ne contient pas 0. ■

Plus généralement, pour une fraction rationnelle, une composée  $\phi \circ \psi$  où  $\psi$  est la paramétrisation de Fatou répulsive étendue associée à un pétale répulsif d'un point périodique parabolique, et  $\phi$  la coordonnée de Fatou attractive étendue associée à un pétale attractif d'un point périodique parabolique (appartenant éventuellement à autre cycle), est un r.d.r au dessus de  $\mathbb{C}$ , car l'orbite des points critiques est sans accumulation dans  $\text{Def}(\phi)$ , qui est le bassin du pétale, et  $E \cap \text{Def}(\phi) = \emptyset$ .

Revenons au cas du polynôme  $P$ . D'après la proposition 2.9, l'ensemble des valeurs critiques de  $h$  est de la forme  $v + \mathbb{Z}$ . Ceci, et le fait que  $h$  commute avec  $T_1$ , implique que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des valeurs critiques de  $h^n$  est de la forme  $A + \mathbb{Z}$  avec  $A$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{C}$  ayant au plus  $n$  éléments, donc n'a pas d'accumulation dans  $\mathbb{C}$ . Donc d'après la proposition 1.6,  $h^n$  est un r.d.r. Résumons :

**Corollaire 2.15 (propriétés de revêtement de  $h$ )**

*L'application  $h^n$  est un r.d.r au dessus de  $\mathbb{C}$ .*

Rappelons les conséquences : soit  $C$  l'ensemble des valeurs critiques de  $h^n$ . L'ensemble  $C$  est fermé. L'application  $h^n$  est un revêtement au dessus de  $\mathbb{C} \setminus C$ . Les chemins et les homotopies peuvent donc s'y relever. Pour tout disque topologique

$U$  contenant au plus une valeur critique de  $h$ , pour toute composante connexe  $V$  de  $h^{-n}(U)$ ,  $V$  est un disque topologique et  $h : V \rightarrow U$  est équivalent à  $z \mapsto z^d : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$  pour un certain  $d \in \mathbb{N}^*$ .

En appliquant la proposition 1.11 à  $f = \psi_{+,j}$ ,  $U = \mathbb{C}$  et  $V = \overset{\circ}{K}$ , on obtient :

**Lemme 2.16** *Les composantes de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j$  sont simplement connexes.*

Donc  $h$  est plein. Donc d'après le corollaire 1.12 :

**Lemme 2.17** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'application  $h^n$  est pleine.*

Rappelons les conséquences : les composantes connexes de la préimage par  $h^n$  d'un ensemble simplement connexe sont simplement connexes. En particulier, les composantes connexes du domaine de définition de  $h^n$  sont simplement connexes.

*Passage au quotient :*

Les applications de cornes commutent avec  $T_1$ , donc se projettent en une application quotient  $\overline{h} : \overset{\circ}{K}\mathcal{F}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

**Proposition 2.18** *C'est également un r.d.r.*

**Preuve :** Soit  $\pi$  la projection de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ . L'application  $f = \pi \circ h$  étant composée de deux r.d.r et n'ayant qu'une valeur critique, la proposition 1.6 implique que  $f$  est un r.d.r, de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$  vers  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ . Il vérifie  $f \circ T_1 = f$ , et son unique facteur  $\tilde{f}$  tel que  $f = \tilde{f} \circ \pi$  est  $\overline{h}$ . La proposition 1.9 implique que  $\overline{h}$  est un r.d.r. ■

Notons que le domaine de définition de  $\overline{h}^n$  peut avoir des composantes connexes non simplement connexes, même si on lui ajoute les deux bouts du cylindre.

Notons également que changer  $(\nu, \sigma)$  en  $(-\nu, \sigma - \nu/q)$  ne peut modifier la valeur de  $h_{\nu, \sigma, j}(z)$  que par l'ajout d'un entier. Donc  $\overline{h}_{\nu, \sigma, j} = \overline{h}_{-\nu, \sigma - \nu/q, j}$ . En particulier l'ensemble des fonctions  $\overline{h}$  pour  $\nu$  et  $j$  fixés et  $\sigma$  variant dans  $\mathbb{C}$  est le même pour les deux valeurs possibles de  $\nu$ .

## 2.4 Les ensembles de Julia-Lavaurs

L'ensemble de Julia-Lavaurs rempli  $K_L\mathcal{F}$  de l'application de cornes  $h$  est l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C}$  tels que soit  $h^n(z)$  est défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $h^n(z) \in J\mathcal{F}$ . On définit l'ensemble de Julia-Lavaurs non rempli  $J_L\mathcal{F}$  comme étant le bord de  $K_L\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{C}$ . Ces ensembles  $J_L\mathcal{F}$  et  $K_L\mathcal{F}$  sont fermés. Rappelons

quelques autres propriétés élémentaires :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} \setminus K_L \mathcal{F} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h^{-n}(\mathbb{C} \setminus K \mathcal{F}) & J_L \mathcal{F} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial K_L \mathcal{F} \\
h^{-1}(K_L \mathcal{F}) &= K_L \mathcal{F} \cap \text{Def}(h) & h^{-1}(J_L \mathcal{F}) &= J_L \mathcal{F} \cap \text{Def}(h) \\
h(K_L \mathcal{F}) &= K_L \mathcal{F} & h(J_L \mathcal{F}) &= J_L \mathcal{F} \\
h^{-1}(K_L^\circ \mathcal{F}) &= K_L^\circ \mathcal{F} & J_L \mathcal{F} &= \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} h^{-n}(J \mathcal{F})} \\
h(K_L^\circ \mathcal{F}) &= K_L^\circ \mathcal{F} & J \mathcal{F} \subset J_L \mathcal{F} &\subset K_L \mathcal{F} \subset K \mathcal{F} \\
\text{Def}(h) &= K \mathcal{F} & \text{Def}(h^n) &= \bigcap_{0 \leq k < n} h^{-k}(K \mathcal{F}) \\
\mathbb{C} \setminus K_L^\circ \mathcal{F} &= \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C} \setminus \text{Def}(h^n)}
\end{aligned}$$

Comme  $h$  est un r.d.r, l'image par  $h$  d'une composante connexe de  $K_L^\circ \mathcal{F}$  en est une (c'est aussi démontré dans [L]).

La définition de l'ensemble de Julia-Lavaurs  $K_L$  de  $g_\sigma$  (appelé aussi ensemble de Julia enrichi) est complètement analogue :  $K_L$  est le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de la réunion des préimages de  $\mathbb{C} \setminus K$  par les itérés de  $g_\sigma$ , et  $J_L = \partial K_L$ . Ces  $q + 1$  définitions sont compatibles entre elles via les différentes applications du diagramme commutatif 2.4, c'est à dire que leurs images directes *et* inverses par les diverses flèches se correspondent.

Tirons quelques conséquences immédiates de nos définitions. Les ensembles  $K \mathcal{F}$ ,  $J \mathcal{F}$ ,  $K_L \mathcal{F}$ ,  $J_L \mathcal{F}$  sont invariants par  $T_1$ .

**Proposition 2.19** *L'ouvert  $K_L^\circ \mathcal{F}$  est plein (ses composantes connexes sont simplement connexes).*

**Preuve** : Cela équivaut à  $\mathbb{C} \setminus \overline{K_L^\circ \mathcal{F}}$  est connexe. Parmi les propriétés élémentaires, nous avons  $\mathbb{C} \setminus K_L^\circ \mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C} \setminus \text{Def}(h^n)$ . Il suffit donc de démontrer que  $\mathbb{C} \setminus \text{Def}(h^n)$  est connexe, ce qui équivaut à ce que  $h^n$  soit pleine, ce qui est démontré au lemme 2.17. ■

**Proposition 2.20** *L'ensemble  $K \mathcal{F}$  contient un demi-plan supérieur (" $\text{Im}(z) > a_0$ ") et un demi-plan inférieur (" $\text{Im}(z) < a_1$ "). En particulier, les deux composantes connexes  $D^+$  et  $D^-$  de  $K \mathcal{F}$  qui contiennent un demi-plan sont invariants par  $T_1$ . L'application  $\bar{h}$  s'étend holomorphiquement en  $+i\infty$  et en  $-i\infty$  en fixant ces points, avec dérivée non nulle.*

On trouvera une preuve dans [S], §2.4. La preuve est basée sur un développement limité des coordonnées de Fatou, et n'est effectuée que dans le cas  $q = 1$ , mais



s'adapte au cas  $q > 1$  en utilisant la proposition 2.3. Nous noterons

$$\widehat{h}$$

le prolongement de  $\overline{h}$  aux deux bouts du cylindre. Ce n'est plus un r.d.r, ni une application pleine (ne serait-ce que parce que nous n'avons défini cette notion que pour des applications à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ).

Dans sa thèse, Lavaurs a adapté le théorème de non-errance de Sullivan au cadre des applications de Lavaurs, ainsi que la classification des composantes connexes de l'ensemble de Fatou d'un polynôme. On en déduit alors la proposition suivante :

**Proposition 2.21 (Lavaurs)**

*Chaque composante connexe de l'intérieur de  $K_L \mathcal{F} \cup \{+\mathbf{i}\infty, -\mathbf{i}\infty\}$  est prépériodique sous  $\widehat{h}$ . Une composante prépériodique est soit un disque de Siegel, soit une composante d'un bassin attractif, soit une composante d'un bassin parabolique, d'un cycle de  $\widehat{h}$  (ce qui inclut les bouts) Il y a au plus un tel cycle. Un cycle parabolique ou attractif de composantes contient toujours un point critique, et donc l'unique valeur critique. Le bord d'un disque de Siegel est contenu dans l'adhérence de l'ensemble postcritique.*

L'affirmation sur le nombre de cycles n'est pas énoncée dans [L]. On peut la déduire en partie du texte des démonstrations ; en effet puisque  $\overline{h}$  n'a qu'une valeur critique, il y a au plus un cycle 'attractif ou parabolique' ; puisque un disque de Siegel est inclus dans l'adhérence de l'ensemble postcritique, il ne peut coexister avec un cycle attractif ou parabolique ; le seul cas que [L] n'exclut pas est la coexistence de deux cycles de Siegel. Nous allons démontrer la proposition plus forte suivante :

**Proposition 2.22** *L'application  $\widehat{h}$  possède au plus un cycle non répulsif.*

**Preuve :** Notons que dans les cycles de  $\widehat{h}$ , on inclut les points fixes  $+\mathbf{i}\infty$  et  $-\mathbf{i}\infty$ . Nous travaillerons par analogie avec le cas polynomial, où la preuve est basée sur la notion d'application à allure polynomiale (mais n'utilise pas les théorème de redressement). Supposons que  $\widehat{h}$  a deux cycles non répulsifs. Choisissons un point quelconque  $\omega \in \mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}} \setminus \overline{K\mathcal{F}}$ . Nous identifions le cylindre  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  à la sphère de Riemann  $\mathbb{S}^2$  moins deux points. Nous travaillerons dans une carte  $U \cong \mathbb{C}$  de  $\mathbb{S}^2$  pour laquelle  $\omega$  est à l'infini. Soit  $R$  l'application rationnelle de  $\mathbb{S}^2$  dont l'expression dans la carte  $U$  est le polynôme suivant :  $R(z) = z + \varepsilon S(z)$ . Nous choisirons le polynôme  $S$  de sorte que :

- l'application  $R$  fixe les point des deux cycles non répulsifs ( $S(z) = 0$  pour tout point  $z$  d'un des cycles) ;
- l'application  $R$  fixe les deux bouts du cylindre (qui ne sont pas forcément disjoints des deux cycles)

– pour tout  $\varepsilon > 0$  et suffisamment petit, les deux cycles non répulsifs de  $\hat{h}$  deviennent des cycles attractifs de  $\hat{h} \circ R$  (ajuster la valeur de  $S'(z)$ , pour chaque  $z$  dans l'un des deux cycles)

Soit  $B$  une boule ouverte contenant  $\omega$ , et telle que  $\overline{B} \cap \overline{K\mathcal{F}} = \emptyset$ . Soit  $V = \mathbb{S}^2 \setminus \overline{B}$ . Pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,  $R$  est un isomorphisme analytique de  $V$  vers  $R(V)$ ,  $\partial V \cap R^{-1}(\overline{K\mathcal{F}}) = \emptyset$ , et  $\overline{K\mathcal{F}} \subset R(V)$ . Soit maintenant  $\hat{H}$  (resp.  $\overline{H}$ ) la fonction définie par  $\hat{H} = \hat{h} \circ R|_V$  (resp.  $\overline{H} = \overline{h} \circ R|_{V \cap \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}}$ ) sur  $V$  (resp.  $V \cap \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}$ ), et non définie hors de  $V$ . Remarquons que  $\hat{H}$  et  $\overline{H}$  n'ont qu'une seule valeur critique. De plus, on peut définir un relevé  $H$  de  $\overline{H}$  par la projection  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  en composant  $h$  avec un relevé de  $R|_{V \cap \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}}$  qui commute avec  $T_1$ . Comme  $\overline{h}$  est un r.d.r et  $R|_{V \cap \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}}$  un isomorphisme sur son image, qui contient  $\text{Def}(\overline{h})$ ,  $\overline{H}$  est un r.d.r. Comme  $\overline{H}$  n'a qu'une valeur critique,  $\overline{H}^n$  a au plus  $n$  valeurs critiques, donc est un r.d.r (proposition 1.6). Comme le relevé de  $R$  est également un isomorphisme sur son image,  $H$  est aussi un r.d.r. Comme  $\overline{H}$  n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, les valeurs critiques de  $H^n$  forment un ensemble sans accumulations dans  $\mathbb{C}$ , donc  $H^n$  est un r.d.r. De plus, toutes les composantes connexes de  $\text{Def}(\hat{h})$  sont simplement connexes (puisque le complémentaire dans  $\mathbb{S}^2$  est connexe), donc les composantes connexes de  $\text{Def}(\hat{H})$  sont simplement connexes, donc  $H$  est plein, donc  $H^n$  est plein. Nous *affirmons* qu'un cycle attractif de  $\hat{H}$  a une valeur critique dans son bassin immédiat, ce qui mène à une contradiction puisque  $\hat{H}$  n'a qu'une valeur critique, et prouve la proposition.

Pour démontrer cette affirmation, soit  $U$  l'intérieur de l'ensemble des points où toutes les itérées de  $H$  sont définies (ce qui correspond à l'intérieur de  $K\mathcal{F}$  dans le cas non perturbé) :  $T_1(U) = U$ . L'ensemble  $U$  est l'intérieur de l'intersection des ensembles  $\text{Def}(H^n)$ . Ces derniers sont pleins car  $H$  est pleine donc toutes ses itérées le sont. Le complémentaire de  $U$  dans  $\mathbb{S}^2$  est donc l'adhérence d'une union d'ensembles connexes. Il est donc connexe. Nous avons prouvé que  $U$  est plein.

L'ouvert  $U$  est bi-invariant par  $H$  :  $H(U) = U$  et  $H^{-1}(U) = U$ . L'image réciproque par  $H$  (ou un itéré) d'une composante connexe  $D$  de  $U$  est une composante connexe  $C$  de  $U$ , et d'après la proposition 1.7,  $H$  (ou son itéré) est un r.d.r de  $C$  vers  $D$ . Soit maintenant  $C$  une composante connexe de  $U$  contenant un point attractif de période  $n$  de  $\overline{H}$ , ou bien un voisinage d'un bout attractif du cylindre. Alors  $\exists m \in \mathbb{Z}$  tel que  $T_m \circ H^n(C) = C$ . Supposons par l'absurde que  $H^n$  n'a pas de point critique dans  $C$ . Alors  $T_m \circ H^n : C \rightarrow C$  est un revêtement, donc un isomorphisme puisque  $C$  est simplement connexe. De plus  $C$  ne peut-être isomorphe à  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{S}^2$  car il n'est ni égal à  $\mathbb{S}^2$  ni égal à  $\mathbb{S}^2$  privé d'un point, donc un isomorphisme de  $\mathbb{C}$  préserve sa métrique hyperbolique, ce qui contredit la présence d'un point attractif. ■

Notons que la proposition 2.20 implique que  $h_\sigma(z) - z$  possède une limite quand  $\text{Im}(z) \rightarrow \infty$ , et une limite quand  $\text{Im}(z) \rightarrow -\infty$ .

**Proposition 2.23** *Si  $q > 1$ , soit  $s$  l'unique entier tel que  $0 < s < q$  et*

$$\nu + sp = 0 \pmod{q}$$

*et si  $q = 1$ , soit  $s = 0$  si  $\nu = 1$  et  $s = 1$  si  $\nu = -1$ . Pour  $b = \pm 1$ , soit  $t_b = \lim h_\sigma(z) - z$  quand  $\text{Im}(bz) \rightarrow +\infty$ . Alors*

$$t_+ - t_- = -i2\pi\gamma + \frac{s}{q}$$

C'est une conséquence du développement de la proposition 2.3, du complément 2.4, et d'un calcul.

## 3. Échiquier et universalité

### 3.1 Un produit de Blaschke

Soit la fraction rationnelle

$$PB(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3}$$

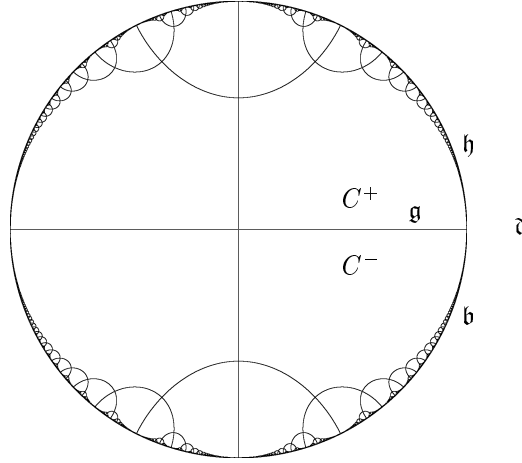
Cette fonction analytique de  $\mathbb{S}^2$  dans lui-même a deux points critiques, 0 et  $\infty$ , un point fixe,  $z = 1$  avec multiplicité 3, donc parabolique, et a les symétries  $PB(\bar{z}) = \overline{PB(z)}$ ,  $PB(1/z) = 1/PB(z)$ , et  $PB(-z) = PB(z)$ . La fraction rationnelle  $PB$  étant un produit de Blaschke, chaque élément de la partition de  $\mathbb{S}^2$  en le disque unité, son bord, et son extérieur est bi-invariant par  $PB$ .

Le point  $z = 1$  est parabolique à deux pétales. Les axes attractifs sont  $1 - \mathbb{R}_+$ , axe indexé  $\mathfrak{g}$  (gauche), et  $1 + \mathbb{R}_+$ , indexé  $\mathfrak{d}$  (droite). Les axes répulsifs sont les axes  $1 + i\mathbb{R}_+$ , indexé  $\mathfrak{h}$  (haut) et  $1 - i\mathbb{R}_+$ , indexé  $\mathfrak{b}$  (bas). Nous noterons  $p_{\mathfrak{g}}$ ,  $p_{\mathfrak{d}}$ ,  $p_{\mathfrak{h}}$ ,  $p_{\mathfrak{b}}$  les pétales correspondant à chaque axe.

L'ensemble  $\mathbb{D}$  étant stable et borné, il est inclus dans l'ensemble de Fatou. De même pour  $\mathbb{S}^2 \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Utilisons le théorème de classification (voir par exemple [CG], chapitre IV, § 2) :  $\mathbb{D}$  contient le pétale  $p_{\mathfrak{g}}$ , donc il est inclus dans le bassin d'attraction de  $p_{\mathfrak{g}}$ . De même,  $\mathbb{S}^2 \setminus \overline{\mathbb{D}}$  est inclus dans le bassin du pétale  $p_{\mathfrak{d}}$ . Ces deux bassins sont deux composantes disjointes de  $\mathbb{S}^2 \setminus J(PB)$ . Donc  $J(PB) = \partial\mathbb{D}$  et  $\mathbb{D}$  est le bassin de  $p_{\mathfrak{g}}$ , et  $\mathbb{S}^2 \setminus \overline{\mathbb{D}}$  celui de  $p_{\mathfrak{d}}$ . Nous noterons  $\phi_{-, \mathfrak{g}}$  et  $\phi_{-, \mathfrak{d}}$  les coordonnées de Fatou attractives étendues correspondantes. Comme elles sont définies à post-composition près par une translation, nous nous arrangerons pour qu'elles envoient respectivement 0 et  $\infty$  sur 0.

Nous noterons  $\psi_{+, \mathfrak{h}}$  et  $\psi_{+, \mathfrak{b}}$  les paramétrisations de Fatou répulsives étendues correspondant aux axes de même index. Nous nous arrangeons pour qu'elles envoient  $\mathbb{R}$  sur  $\partial\mathbb{D}$ , d'où  $\psi_{+, \mathfrak{h}}(\bar{z}) = i(\psi_{+, \mathfrak{h}}(z))$  et  $\psi_{+, \mathfrak{b}}(\bar{z}) = i(\psi_{+, \mathfrak{b}}(z))$  où  $i$  est l'inversion  $z \mapsto 1/\bar{z}$ , et pour que  $\psi_{+, \mathfrak{b}}(\bar{z}) = \overline{\psi_{+, \mathfrak{h}}(z)}$  (ce qui laisse encore un  $\mathbb{R}$ -degré de liberté dans les choix).

Tout point  $z \in \mathbb{D}$  est attiré par 1, avec  $\arg(1 - PB^n(z)) \rightarrow 0$ . On a  $PB(] - 1, 1[) = [1/3, 1[ \subset ] - 1, 1[$ . Le *graphe parabolique*  $CB$  est l'union de l'intervalle  $] - 1, 1[$  et de ses préimages successives par  $PB$ . L'ensemble  $CB$  est  $PB$ -bi-invariant. Nous avons la propriété  $CB = \phi_{-, \mathfrak{g}}^{-1}(\mathbb{R})$ . Donc  $CB$  est un fermé de  $\mathbb{D}$ . La fonction

FIG. 3.1 – le graphe parabolique  $CB$  de  $PB$ 

$PB$  agit sur l'ensemble des composantes connexes de  $\mathbb{D} \setminus CB$ , qui sont appelées les *cases d'échiquier*. Comme  $\phi_{-,g}$  est un r.d.r, il envoie chaque case d'échiquier isomorphiquement sur  $\mathbb{H}$  ou  $-\mathbb{H}$ . La fonction  $PB$  envoie  $]0, 1[$  dans lui-même de façon strictement croissante et sans point critique. Donc l'une des cases d'échiquier est un voisinage de  $]0, 1[$  dans le demi-plan supérieur. Nous l'appellerons  $C^+$ . Son symétrique par rapport à  $\mathbb{R}$  sera noté  $C^-$ . Le pétale  $p_g$  est un voisinage de  $]1 - \varepsilon, 1[$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . Pour un pétale suffisamment petit,  $p_g \cap \mathbb{H} \subset C^+$  et  $p_g \cap -\mathbb{H} \subset C^-$ . Tout  $z \in \mathbb{D}$  n'appartenant pas à  $CB$  a son orbite qui tombe dans  $C^+$  ou dans  $C^-$ , et y reste.

Soit  $h_{PB} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application de cornes de  $PB$  pour l'axe  $h$  :  $h_{PB} = \phi_{-,g} \circ \psi_{+,h}$  sur  $\mathbb{H}$  et  $h_{PB} = \phi_{-,d} \circ \psi_{+,h}$  sur  $-\mathbb{H}$ . Notons que nous avons pris une phase nulle, ce qui n'a pas d'importance pour la suite. Notons également qu'avec nos conventions, l'application de cornes correspondant à l'axe  $b$  est la même fonction. Nous appellerons *graphe parabolique de  $h_{PB}$*  (la figure 3.3 en montre l'intersection avec  $\mathbb{H}$ ) l'ensemble  $\psi_{+,h}^{-1}(CB \cup i(CB))$ . La fonction  $h_{PB}$  l'envoie dans  $\mathbb{R}$ . Nous appellerons cases d'échiquier de  $h_{PB}$  les composantes connexes du complémentaire du graphe dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

**Lemme 3.1** *Les deux seules cases d'échiquier de  $PB$  adhérent à 1 sont  $C^+$  et  $C^-$ .*

**Preuve :** Puisqu'elles possèdent  $]0, 1[$  dans leurs bords, elles adhèrent à 1. Réciproquement une case  $C$  adhérent à 1 a toutes ses image successives par  $PB$  qui adhèrent à 1. Rappelons que toute case finit par être envoyée sur  $C^+$  ou  $C^-$ . Si  $C$  n'était pas égal à  $C^+$  ou  $C^-$ , elle devrait par une certaine itérée être envoyée sur  $-C^+$  ou  $-C^-$  (car  $PB^{-1}(C^+) = C^+ \cup -C^+$  et  $PB^{-1}(C^-) = C^- \cup -C^-$ ). Comme ces cases sont incluses dans le demi-plan " $\text{Re}(z) < 0$ ", elles n'adhèrent pas à 1. On

aurait donc une contradiction.  $\blacksquare$

**Lemme 3.2** *La fonction  $\psi_{+,h} : \mathbb{C} \setminus \psi_{+,h}^{-1}(1) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{1\}$  est un r.d.r. De même pour  $\psi_{-,h}$ .*

La preuve est parfaitement analogue à celle de la proposition 2.12.

**Lemme 3.3** *Mis à part deux cases, que l'on nommera  $E_{PB}^+$  et  $E_{PB}^-$ , contenant un demi-plan respectivement supérieur et inférieur, les cases d'échiquier de  $h_{PB}$  sont bornées. De plus,  $\partial E_{PB}^+ \subset \mathbb{H}$ ,  $\partial E_{PB}^- \subset -\mathbb{H}$  et leur image par  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}$  sont des courbes de Jordan qui contiennent chacune un unique point critique de  $\bar{h}_{PB}$ .*

**Preuve :** Le développement de la proposition 2.3 implique que le complémentaire du graphe parabolique dans  $\mathbb{H}$  contient un ouvert  $U$  tel que  $U + \mathbb{Z}$  soit un demi-plan. Il existe donc une case  $E_{PB}^+$  (forcément unique) contenant ce demi-plan. De même pour  $E_{PB}^-$ . Le lemme 3.2 implique que  $\psi_{+,h}$  admet une branche réciproque  $f$  prolongeant à  $\mathbb{H}$  (et même à  $\mathbb{S}^2 \setminus [1/3, 3]$ , branche que nous noterons  $f_2$ ) la coordonnée de Fatou répulsive du pétale  $p_h$ . Soit  $V = f(\mathbb{H})$  : il contient un piège pour  $T_{-1}$  (l'image du pétale). Le développement de la proposition 2.3 implique que  $V$  contient des points de  $E_{PB}^+$ . A nouveau, le lemme 3.2 implique que  $V$  contient  $E_{PB}^+$  et est un isomorphisme de  $E_{PB}^+$  vers une case d'échiquier. A nouveau, la proposition 2.3 implique que cette case contient des points de  $\mathbb{H}$  dans le pétale  $p_h$ , donc que c'est  $C^+$ . L'application  $PB$  possède une unique branche réciproque définie sur  $\mathbb{H}$  et l'envoyant dans lui-même, que nous noterons  $g$  (et qui admet un prolongement continu au bord de  $\mathbb{H}$ ). Notons que  $f$  conjugue  $g$  à  $T_{-1}$ . Par conséquent  $\partial E_{PB}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T_n(f_2([0, \mathbf{i}/\sqrt{3}]))$  : en effet,  $[0, \mathbf{i}/\sqrt{3}]$  s'envoie bijectivement sur  $[0, PB(0)]$  par  $PB$ , ce qui fait que  $\partial C_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^n([0, \mathbf{i}/\sqrt{3}]) \cup \bigcup_{n \geq 1} PB^n([0, \mathbf{i}/\sqrt{3}])$ .

Donc  $\partial E_{PB}^+ \subset \mathbb{H}$ . D'autre part, le bord de  $\bar{E}^+$  est égal à  $\pi(f_2([0, \mathbf{i}/\sqrt{3}]))$ , et ce segment est disjoint de son image par  $PB$ , sauf en  $\mathbf{i}/\sqrt{3}$ , donc son image par  $f_2$  est une courbe de Jordan :  $\partial \bar{E}^+$  est une courbe de Jordan. L'adhérence de la case  $C^+$  contient une unique orbite critique de  $PB$  indexée par  $\mathbb{Z}$ , et donc l'adhérence de  $E_{PB}^+$  contient un unique point critique modulo  $\mathbb{Z}$ , car pour deux points critiques  $w$  et  $w'$  de  $h_{PB}$  sur le bord de  $E_{PB}^+$ , les points  $\psi_{+,h}(w - n)$  et  $\psi_{+,h}(w' - n)$  ( $n \geq 0$ ) sont des points précritiques de  $PB$  qui finissent par rester dans le pétale  $p_h$ .

Soit  $E$  une case de  $h_{PB}$ , que nous supposons incluse dans  $\mathbb{H}$  (l'autre cas étant symétrique) et différente de  $E_{PB}^+$ . Soit  $w \in E$ . Soit  $n$  suffisamment grand pour que  $w - n \in V$ . Alors  $\psi_{+,h}(w - n - 1) \in g(\mathbb{H}) = \mathcal{Q} \subset \mathbb{H}$  où  $\mathcal{Q}$  est le quart de plan "Re(z) > 0 et Im(z) > 0". La case contenant  $z$  est non seulement incluse dans  $\mathbb{H}$ , mais également d'adhérence compacte dans  $\mathbb{H}$  : en effet cette case n'est ni  $C^+$ , qui s'envoie sur  $E_{PB}^+$ , ni  $-C^-$  qui ne rencontre pas  $\mathcal{Q}$ , et d'après le lemme 3.1, ce sont les deux seules qui adhèrent à  $\mathbb{R}$ .  $\blacksquare$

## 3.2 Universalité

On reprend les notations de la section 2. En particulier  $P(z) = e^{i2\pi p/q}z + z^2$ . Soit  $U_0$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}(P)$  qui contient le point critique. Soit  $\Phi$  l'isomorphisme conforme de  $U_0$  vers  $\mathbb{D}$  qui envoie en 0 le point critique de  $P$ . L'isomorphisme  $\Phi$  est déterminé à post-composition près avec une rotation  $z \mapsto \rho z$ . Pour un bon choix de  $\Phi$ , nous avons la propriété d'universalité suivante, prouvée dans [DH], exposé IX :

### Proposition 3.4 (Universalité)

$$PB|_{\mathbb{D}} = \Phi \circ P^q \circ \Phi^{-1}.$$

**Définition :** le *graphe parabolique* de  $U_0$  est la préimage par  $\Phi$  de celui de  $PB$ . Ses cases sont les composantes du complémentaire dans  $U_0$  du graphe.

Nous rappelons que l'indexation des axes de  $P$  a été choisie de sorte que  $0 \in K^0$ . Donc  $\phi_{-,0}$  est définie en particulier sur  $U_0$ . De la proposition 3.4, on déduit :

### Proposition 3.5

$$\exists u \in \mathbb{C} \forall z \in U_0, \phi_{-,0}(z) = T_u \circ \phi_{-,g} \circ \Phi(z).$$

**Preuve :** Pour  $z \in U_0$ , soit  $a(z) = \phi_{-,g} \circ \Phi(z)$ . Alors  $a(P^q(z)) = a(z) + 1$  est définie sur  $U_0$ , et on conclut par la proposition 2.8 (avec comme pièges ouverts  $A = U_0$ , et  $A' = \Phi^{-1}(p_g)$ ). ■

Il y a des énoncés plus généraux.

Pour  $b = 1$  (respectivement  $b = -1$ ), et  $j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , rappelons que  $D_j^b$  désigne la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j$  qui contient un demi-plan supérieur (respectivement inférieur), qui existent, voir la proposition 2.20. La figure 3.3 illustre cette définition.

Le développement de la proposition 2.3 implique que  $\psi_{+,j}(D_j^b)$  rencontre le pétale attractif d'indice  $j + \frac{b}{2}$ . D'après la remarque suivant la proposition 2.12, on a en fait  $\psi_{+,j}(D_j^b)$  qui est égal à toute la composante de  $\overset{\circ}{K}$  contenant ce pétale. En particulier  $\psi_{+,-1/2}(D_{-1/2}^+) = U_0$ , et  $\psi_{+,1/2}(D_{1/2}^-) = U_0$ .

### Proposition 3.6

Il existe un isomorphisme analytique  $\xi^+ : D_{-1/2}^+ \rightarrow \mathbb{H}$  tel que

$$\psi_{+,b} \circ \xi^+ = \Phi \circ \psi_{+,-1/2}|_{D_{-1/2}^+}$$

De même, il existe un isomorphisme analytique  $\xi^- : D_{1/2}^- \rightarrow -\mathbb{H}$  tel que

$$\psi_{+,b} \circ \xi^- = \Phi \circ \psi_{+,1/2}|_{D_{1/2}^-}$$

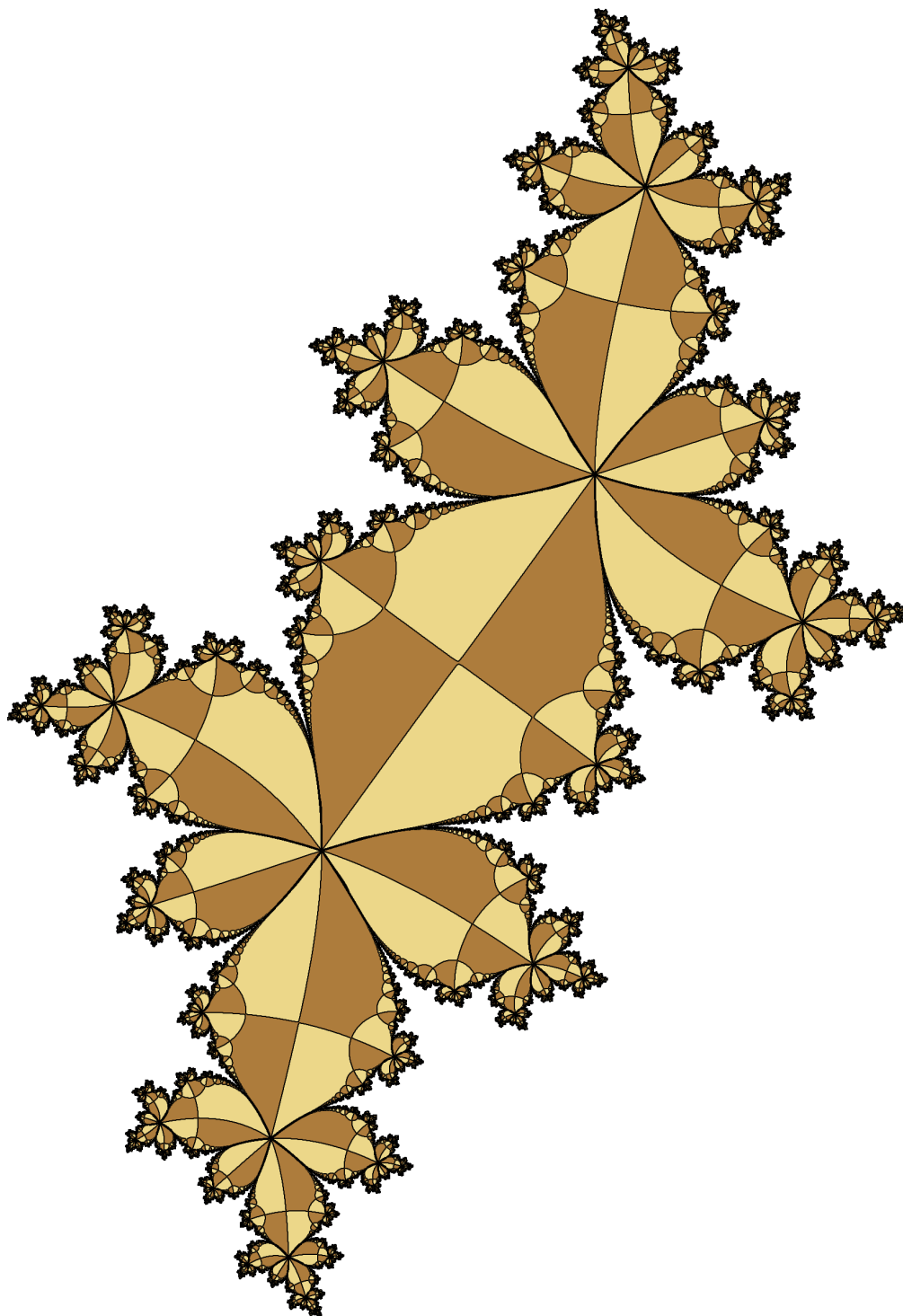


FIG. 3.2 – L'ensemble de Julia  $K$  pour  $p/q = 2/5$ , et son échiquier parabolique (l'image est tournée de 90 degrés)



**Preuve :** Nous traiterons le cas  $+$ , le cas  $-$  étant analogue. Soit  $\xi_0$  un isomorphisme de  $D_{-1/2}^+$  vers  $\mathbb{H}$  qui commute avec  $T_1$ , et considérons la fonction  $f = \Phi \circ \psi_{+,-1/2} \circ \xi_0^{-1}$  de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{S}^2$ . La distance de  $f(z)$  à  $\partial\mathbb{D}$  tend vers 0 quand  $z$  tend vers  $\partial\mathbb{H}$ , donc  $f$  admet une réflexion de Schwarz (voir [R]). Alors d'après la proposition 2.8 adaptée au cas de  $PB$ ,  $f = \psi_{+,b} \circ T_t$  pour un certain  $t \in \mathbb{C}$  (on prend les pièges ouverts  $A = \mathbb{C}$  et  $A' = \xi_0(\phi_{+,-1/2}(p_{-1/2}))$ ). Nous prenons  $\xi^+ = T_t \circ \xi_0$ . ■

Alors :

**Proposition 3.7 (universalité pour les applications de cornes)**

$$\exists s \in \mathbb{C} \quad h_{PB} \circ \xi^+ = h_{s,-1/2}|_{D^+,-1/2}$$

$$\exists s \in \mathbb{C} \quad h_{PB} \circ \xi^- = h_{s,1/2}|_{D^-,1/2}$$

Nous définissons  $\xi_j^+ : D_j^+ \rightarrow \mathbb{H}$  et  $\xi_j^- : D_j^- \rightarrow -\mathbb{H}$  par  $\xi_j^b = \xi^b \circ T_{k/q}$  où  $k$  est l'unique entier tel que  $0 \leq k < q$  et  $kp + \frac{b+j}{2} = 0 \pmod{q}$  (de sorte que  $P^k(U_{\frac{b+j}{2}}) = U_0$ ).

Nous allons maintenant étendre la définition de l'échiquier parabolique pour les différentes coordonnées en jeu.

**Définition :** le graphe parabolique de  $P$  est la réunion des préimages itérées par  $P$  de celui de  $U_0$ . Les cases sont les composantes du complément du graphe dans  $\overset{\circ}{K}$ . En prenant la préimage du graphe parabolique de  $P$  par  $\psi_{+,j}$ , on définit le graphe parabolique de  $K\mathcal{F}_j$ . Le graphe parabolique de  $D_j^+$  est la restriction du graphe de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j$  à  $D_j^+$ . Idem pour  $D_j^-$ . A chacun de ces ensembles  $X$ , on associe également des cases d'échiquier, qui sont les composantes connexes du complémentaire dans  $X$  du graphe parabolique de  $X$ .

Toutes ces définitions de graphes paraboliques (de  $PB$ ,  $h_{PB}$ ,  $U_0$ ,  $K$ ,  $D_j^\pm$  et  $K\mathcal{F}_j$ ) sont compatibles via diverses applications définies entre eux :

$$\Phi : U_0 \rightarrow \mathbb{D}, \quad \xi_j^\pm : D_j^\pm \rightarrow \pm\mathbb{H}, \quad P : \overset{\circ}{K} \rightarrow \overset{\circ}{K}, \quad \psi_{+,\eta/b} : \pm\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, \quad \psi_{+,j} : \overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j \rightarrow \overset{\circ}{K}$$

et également les application  $T_{1/q} : \mathbb{C}_j \rightarrow \mathbb{C}_{j+p}$ , au sens où l'image par chacune du graphe de l'ensemble de départ est le graphe de l'ensemble d'arrivée. Les applications suivantes les envoient sur une ligne horizontale :

$$\phi_{-,g} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h_{PB} : \pm\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_{-,i} : K^i \rightarrow \mathbb{C}, \quad h_{\sigma,j} : \overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j \rightarrow \mathbb{C}$$

(pour tout  $\sigma \in \mathbb{C}$ ). La restriction de ces applications à une case d'échiquier est un isomorphisme vers une case d'échiquier pour la première série d'applications, et vers un demi-plan pour la deuxième. (la preuve de cette affirmation vient des propriétés r.d.r des applications  $h$ ,  $\phi$  et  $\psi$ , adaptées des proposition 2.10, 2.12 et 2.14).

**Lemme 3.8** *Il existe une case d'échiquier  $E^+$  (resp.  $E^-$ ) de  $K\mathcal{F}_j$  qui contient un demi-plan supérieur (“ $\text{Im}(z) > a_1$ ”) (resp. un demi-plan inférieur “ $\text{Im}(z) < a_2$ ”).*

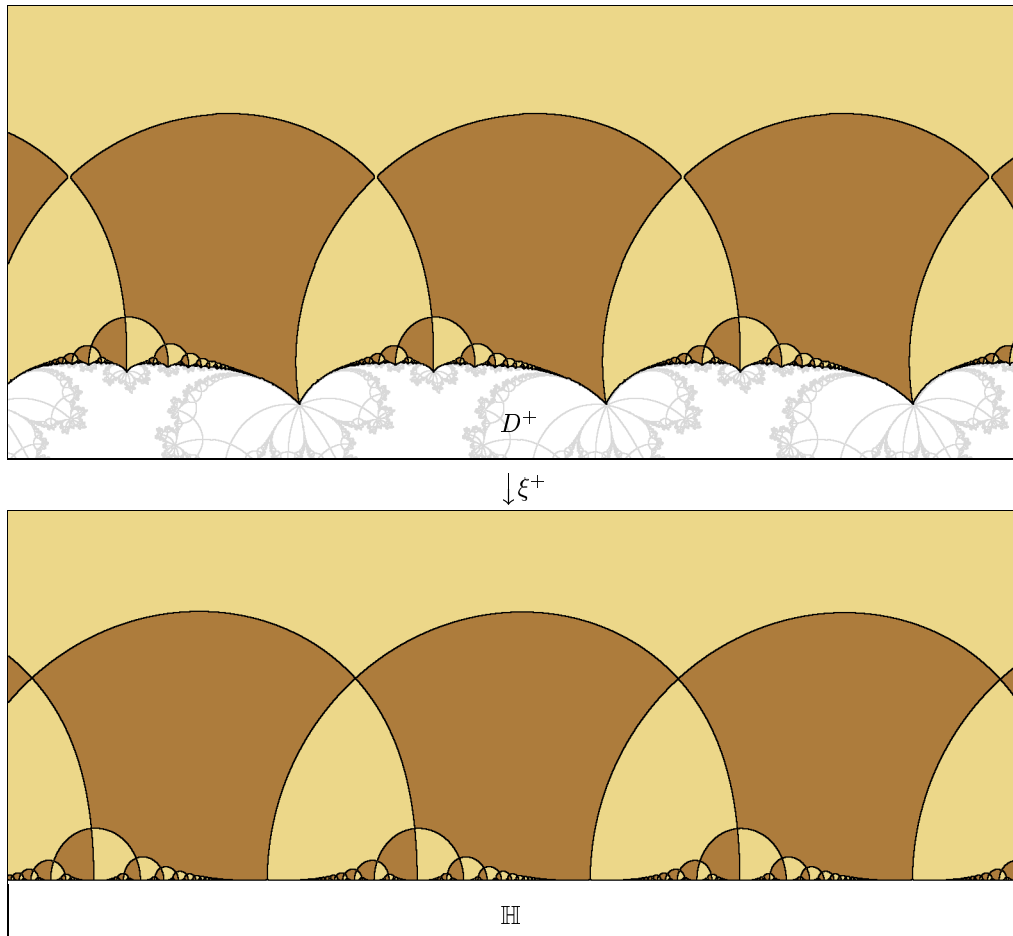


FIG. 3.3 – Exemple d’un domaine  $D^+$  avec son échiquier parabolique, dans le cas  $p/q = 2/5$ , suivis de leurs images par  $\xi^+$ , c’est à dire le demi-plan supérieur avec l’échiquier parabolique de l’application de cornes de  $PB$ .

Cette case est donc invariante par  $T_1$ . De plus, son adhérence  $\overline{E}^b$  ( $b = \pm 1$ ) dans  $\mathbb{C}$  est contenue dans  $K\mathcal{F}_j$ , et  $h_{s,j}$  est un homéomorphisme de  $\overline{E}^b$  vers  $b\overline{\mathbb{H}}$ , (où  $s \in \mathbb{C}$  est choisi de sorte que l’image du graphe parabolique soit  $\mathbb{R}$ ). Enfin, le bord de  $\overline{E}^+$  et  $\overline{E}^-$  sont des courbes de Jordan qui contiennent chacune un unique point critique de  $\overline{h}_{s,j}$ , appelé point critique principal de l’application de cornes au bout concerné.

**Preuve :** Il suffit d’utiliser le lemme 3.3 et la proposition 3.6. ■

Note : on aurait pu prouver ce lemme en se passant de l’universalité, en utilisant les propriétés de r.d.r de  $h$  et le fait qu’elle se prolonge aux bouts (proposition 2.20).

**Remarque :** L’universalité pour  $h$  (proposition 3.6) implique également que le module de l’anneau  $\overline{E}^b \setminus \overline{D}^b$  est égal à celui de l’analogie pour  $PB$ , donc est universel (il ne dépend pas de  $b$  et vaut  $\approx 0.7$ ). Nous utiliserons ce fait dans la partie “Étude

des objets limites de l'implosion parabolique".

## 4. Lemmes de connexité locale pour lapins et échiquiers

Fixons  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$ , et  $0 < p < q$  premier à  $q$ . Soit  $\rho = e^{i\pi p/q}$ , et  $c = \rho/2 - \rho^2/4$ . Nous appellerons par abus de langage *lapin* l'ensemble de Julia  $J$  de  $Q = Q_c$  ( $Q_c(z) = z^2 + c$ ). Nous appellerons les composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}$  les *composantes du lapin*. Le point fixe parabolique  $\alpha$  de  $Q$  attire l'unique point critique de  $Q$ . Donc, d'après [DH], exposé X :

**Proposition 4.1** *L'ensemble de Julia  $J$  est localement connexe.*

Par conséquent, l'ensemble  $K$  est localement connexe. Comme  $K$  est sous-ensemble compact du plan, de complémentaire connexe, l'adhérence de toute composante du lapin est homéomorphe à  $\overline{\mathbb{D}}$  (voir [DH], exposé II, proposition 3). Une autre conséquence de la locale connexité de  $J$  est que tout rayon externe atterrit, sur un point de  $J$ , tout point de  $J$  est le point d'atterrissage d'un rayon externe, et l'application  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  qui à  $\theta$  associe le point d'atterrissage du rayon externe d'angle  $\theta$  est continue. On peut donc appliquer l'étude combinatoire de [DH]. En particulier, il n'y a pas d'autre composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$  adhérent à  $\alpha$  que les  $q$  qui contiennent un pétale attractif.

Considérons l'image  $S' \subset \overline{U}_0$  de  $[1/3, 1]$  par l'isomorphisme  $\Phi$  de la section 3. C'est un chemin injectif partant de la valeur critique de  $Q^q$  et arrivant au point fixe parabolique  $\alpha$  de  $Q$ . Soit le chemin injectif  $S = \Phi([0, 1]) \subset \overline{U}_0$ , qui lui part du point critique de  $Q$ . Considérons maintenant l'ensemble  $L = S' \cup l \cup Q(S) \cup \dots \cup Q^{q-1}(S)$  (en notant bien que le premier terme est  $S'$  et non pas  $S$ ), où  $l$  est n'importe quel rayon externe atterrissant en  $\alpha$ . Soit  $V = \mathbb{C} \setminus L$ . C'est un ouvert simplement connexe qui ne contient aucune valeur critique. Donc toute branche inverse de  $Q^n$  définie au voisinage connexe d'un point de  $V$  se prolonge à  $V$  tout entier. Notons que  $J \cap L = \{\alpha\}$ .

Considérons maintenant parmi les  $q$  ( $\geq 2$ ) rayons externes qui atterrissent en  $-\alpha$ , les deux qui sont adjacents à  $U_0$  (voir [DH] pour plus de détails sur la notion d'adjacence). Avec  $-\alpha$ , ils forment un ensemble séparant  $\mathbb{C}$  en deux composantes connexes. Soit  $W$  celle qui ne contient pas le point critique de  $Q$ , et  $W^\bullet = W \cup \{-\alpha\}$ .

**Proposition 4.2** *Pour tout point  $z \in J$ , soit  $z$  appartient au bord d'une des  $q$*

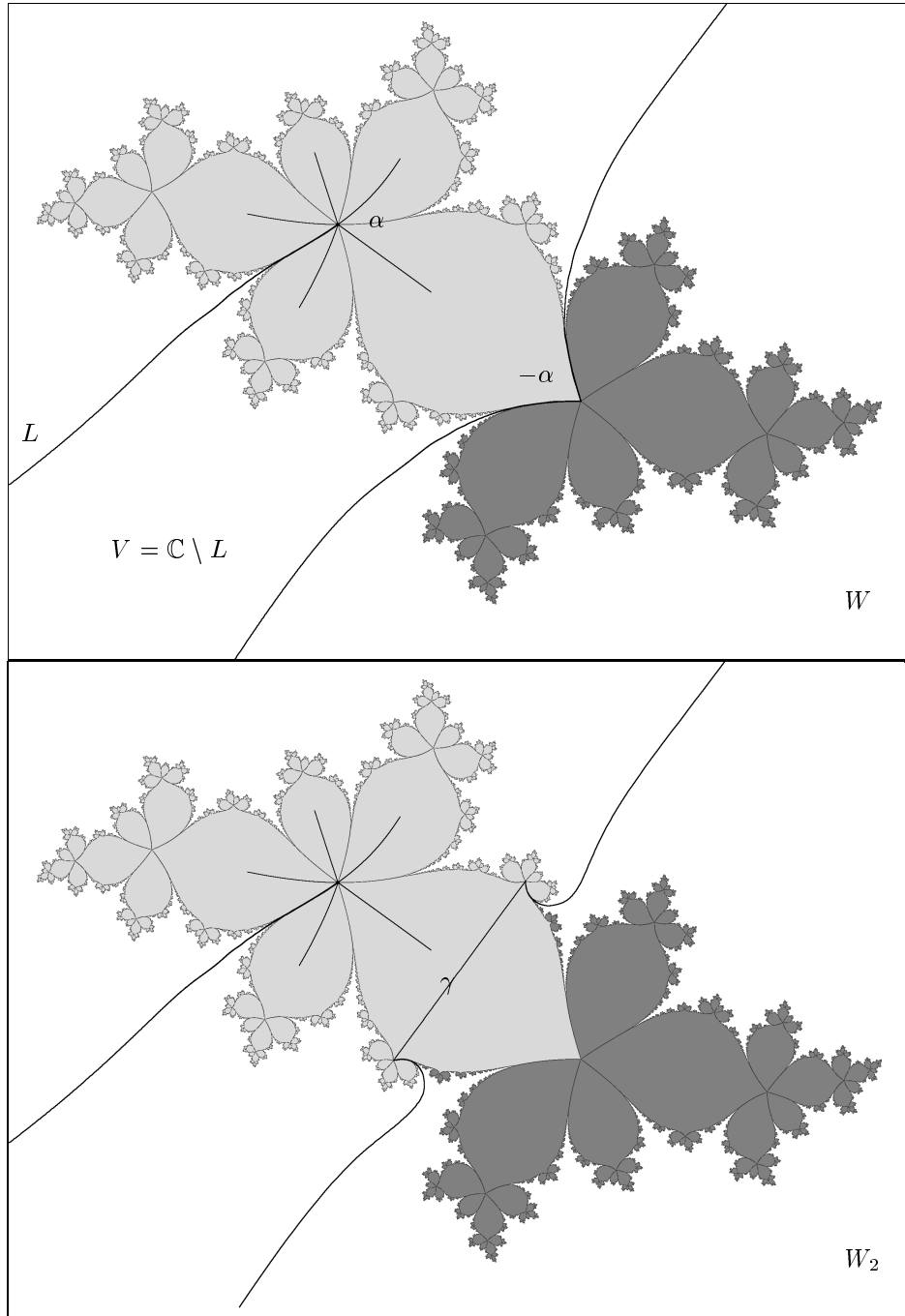


FIG. 4.1 – Le bord des ensembles  $V$  et  $W$ , utilisés dans la preuve des lemmes. Nous avons grisé les ensembles compacts dont les images réciproques sont utilisées comme voisinages.

composantes du lapin attachées à  $\alpha$ , soit  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $Q^n(z) \in W$ .

**Preuve :** Par continuité du lacet de Carathéodory, l'ensemble des arguments des rayons externes dont le point d'atterrissage appartient à  $W$  est un certain intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et non vide (car on a supposé  $q \geq 2$ . Soit  $D : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  l'application de doublement de l'angle :  $x \mapsto 2x$ . L'ensemble  $C$  des  $x \in \mathbb{T}$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n(x) \notin I$  est exactement l'union de l'ensemble des arguments externes des points de  $J$  qui ne tombent jamais dans  $\overline{W}$ , et de la réunion de deux arguments pour tout point dont l'orbite passe par  $-\alpha$ . La réunion des préimages de  $I$  par les  $D^n$  est dense dans  $\mathbb{T}$ , donc le fermé  $C$  est d'intérieur vide (en fait, c'est un ensemble de Cantor). Soit  $C'$  l'ensemble des arguments des points qui ne tombent jamais dans  $W$ ;  $C'$  est la réunion de  $C$  et d'un ensemble de points isolés. Donc  $C'$  ne contient pas d'intervalle.

Remarque : soit  $F$  la réunion de l'adhérence des  $q$  composantes  $U_0, \dots, U_{q-1}$  de  $\overset{\circ}{K}$  attachées à  $\alpha$ . L'étude combinatoire de [DH] implique que pour  $1 \leq i \leq q-1$ ,  $-U_i \subset W$ . D'autre part, il est facile de voir que  $U_0 = -U_0$ , et que pour  $0 \leq i \leq q-1$ ,  $Q^{-1}(U_{i+1}) = U_i \cup -U_i$  avec la convention  $U_q = U_0$ . Donc l'ensemble  $Q^{-1}(F)$  est la réunion de  $F$  et d'un sous-ensemble de  $W$ . Donc pour tout point  $z$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $Q^n(z) = \alpha$ , soit  $z \in F$ , soit il existe  $m < n$  tel que  $Q^m(z) \in W$ .

Considérons un point  $z \in J \setminus F$ , et soit  $M$  la composante connexe de  $J \setminus F$  qui contient  $z$ . Puisque  $J$  est connexe,  $M$  n'est pas réduit à un point, donc l'ensemble des arguments des rayons externes qui atterrissent sur  $M$  contient un intervalle  $I'$ . Donc il ne peut pas être inclus dans  $C'$ . Donc il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Q^n(M) \cap W \neq \emptyset$ . Prenons le plus petit  $n$  possible. Il suffit de prouver que  $Q^n(M) \subset W$ . Si ce n'était pas le cas,  $Q^n(M)$  rencontrerait  $\partial W$ , et le seul point de  $\partial W \cap J$  est  $-\alpha$ , donc  $-\alpha \in Q^n(M)$ , or  $L \cap F = \emptyset$ , ce qui implique d'après la remarque qu'il existe  $m < n$  tel que  $Q^m(M) \cap W \neq \emptyset$ , contredisant la minimalité de  $n$ . ■

Notons que  $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ , donc  $J = \overset{\circ}{\partial K}$ , comme l'implique le théorème de Montel (voir également le théorème 1.7. dans [CG]).

### Lemme 4.3

$$W \cap K = W \cap \overline{U}_W$$

où l'ouvert  $U_W$  est l'union des composantes du lapin incluses dans  $W$ .

**Preuve :** Remarque : comme  $\partial W \cap K = \{-\alpha\}$ , toute composante de  $\overset{\circ}{K}$  est soit incluse dans  $W$  soit disjointe de  $\overline{W}$ .

L'ensemble  $U_W \subset W \cap \overset{\circ}{K}$ , donc  $\overline{U}_W \subset \overline{W} \cap K$ , d'où  $W \cap \overline{U}_W \subset W \cap K$ .

Réciproquement, soit  $z \in W \cap K$ . Notons que  $W$  est un voisinage de  $z$ , donc  $z$  est dans l'adhérence de l'ensemble des composantes ayant un point commun avec  $W$ .

D'après la remarque, ces composantes sont en fait incluses dans  $W$ . Donc  $z \in \overline{U}_W$ .  
D'où  $W \cap K \subset W \cap \overline{U}_W$ . ■

**Lemme 4.4** *À tout point  $z \in J$ , on associe un ouvert  $U$  défini comme suit*

- Si  $z$  n'appartient pas au bord d'une composante du lapin, soit  $U = \emptyset$ .
- Si  $z$  appartient au bord d'une composante du lapin mais n'est pas une préimage itérée de  $\alpha$ , alors il n'y a qu'une seule telle composante. Soit  $U$  celle-là.
- Si  $z$  est une préimage itérée de  $\alpha$ , alors il appartient au bord d'exactly  $q$  composantes du lapin. Soit  $U$  leur union.

*Alors  $z$  a une base de voisinages connexes dans  $K \setminus U$ , dont chaque élément est l'adhérence d'une union de composantes du lapin.*

**Preuve** : Dans le premier cas, d'après la proposition 4.2, l'orbite d'un point de  $J$  qui n'appartient au bord d'aucune composante du lapin passe une infinité de fois dans  $W$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Q^n(z) \in W$ . Comme  $W^\bullet \cap J$  est compact et contenu dans  $V$ , et comme la branche  $g$  de  $Q^{-n}$  qui ramène  $Q^n(z)$  sur  $z$  s'étend de façon univalente sur  $V$ ,  $g$  envoie le voisinage connexe  $W^\bullet \cap K$  de  $Q^n(z)$  dans  $K$  sur un voisinage connexe de  $z$  dans  $K$  (d'après la bi-invariance de  $K$  par  $Q$ ), qui satisfait la condition requise (d'après le lemme 4.3), et est de diamètre commensurable au réel  $1/|(Q^n)'(z)|$  (par distortion bornée). Si ce dernier ne tendait pas vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ , les itérées de  $Q$  auraient une sous-suite qui est une famille normale dans un voisinage de  $z$ , ce qui est absurde puisque  $z \in J$ .

Dans le deuxième cas, on procède de façon analogue, en remplaçant l'ensemble  $W$  par un ensemble  $W_2$  plus grand : la composante connexe ne contenant pas  $\alpha$  du complémentaire de la réunion du chemin injectif  $\gamma = \Phi^{-1}([-i, i])$  et de deux rayons externes qui aboutissent en chacun des bouts. On définit  $W_2^\bullet = W_2 \cup \gamma$ , et on a  $\overline{W}_2 \cap K = \gamma \cup (W_2 \cap K)$  et  $\gamma \cap \overset{\circ}{K} \subset U_0$ . L'analogue de la proposition 4.2 est :  $\forall z \in J \setminus \{\alpha\}, \exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $Q^n(z) \in W_2$ . L'analogue du lemme 4.3 dit que  $(\overline{W}_2 \cap K) \setminus U_0$  est l'adhérence des composantes du lapin incluses dans  $W_2$ .

Dans le troisième cas, il suffit de démontrer le lemme pour  $z = \alpha$ . De plus, soit  $j$  l'index d'un axe répulsif quelconque, et  $P_j$  le pétale répulsif correspondant : il suffit de fournir une base de voisinages connexes de  $\alpha$  dans  $(P_j \cap K \setminus U) \cup \{\alpha\}$ , et vérifiant les conditions du lemme. On peut choisir  $j$  et  $P_j$  tels que  $P_j \cap V = \emptyset$ , car on a supposé  $q \geq 2$ . Soit maintenant  $g$  l'unique prolongement à  $V$  de la branche de l'inverse de  $Q^q$  envoyant  $P_j$  dans  $P_j$ . Soit  $k_1 < q$  et  $k_2 < q$  les exposants des deux itérés de  $Q$  envoyant l'axe attractif associé à  $U_0$  dans les deux axes attractifs adjacents à  $P_j$ . Soit  $S'_3 = \Phi^{-1}([-1, 1])$ . Les deux chemins injectifs  $Q^{k_1}(S'_3)$  et  $Q^{k_2}(S'_3)$  ont chacun un bout égal à  $\alpha$ , et un autre noté respectivement  $b_1$  et  $b_2$ . Soient  $\mathcal{R}_i$  un rayon externe aboutissant en  $b_i$ . Soit  $W_3$  le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de  $\{\alpha\} \cup Q^{k_1}(S'_3) \cup Q^{k_2}(S'_3) \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ . Soit  $W_3^\bullet = W_3 \cup \{\alpha\}$ . Quitte à rétrécir  $P_j$ , tout en conservant sa propriété d'être un pétale (c'est à dire de contenir un demi-plan à gauche dans la coordonnée

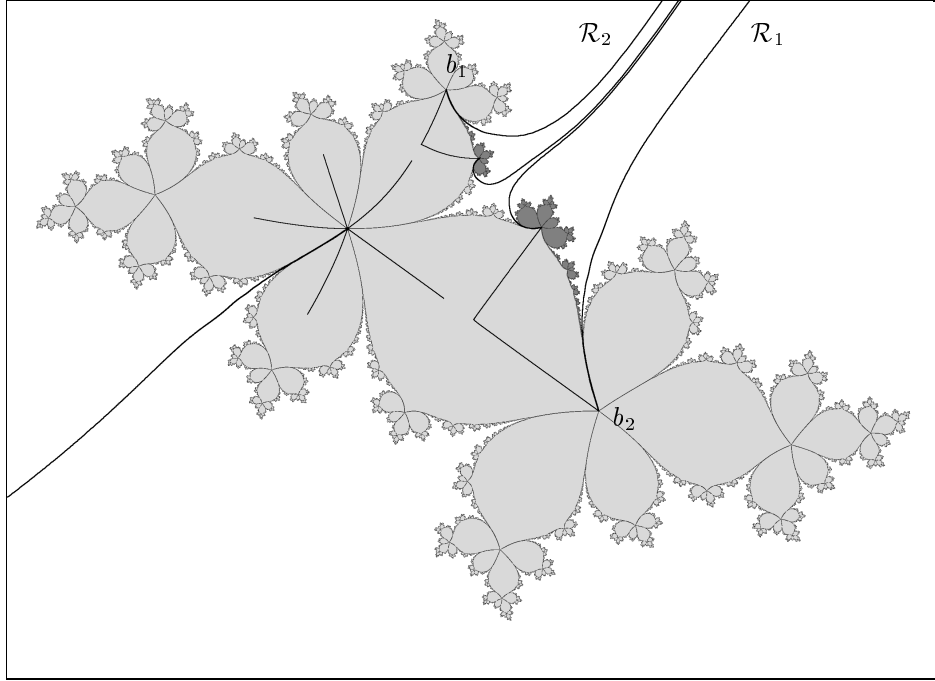


FIG. 4.2 – Le troisième cas : ensembles utilisés pour produire des voisinages de  $\alpha$ . Nous avons grisé l'ensemble  $T$ .

$-1/qCz^q$ , voir la section 2), on peut supposer que  $P_j \subset W_3$ . Soit  $C = W_3 \cap J$ . Cette fois-ci, l'ensemble  $C = W_3 \cap J$  n'a plus une adhérence compacte dans  $V$ . Cependant, l'ensemble  $T = C \setminus g(C)$  a une adhérence compacte dans  $V$ , car une hypothétique suite de points de  $T$  tendant vers  $\alpha$  appartiendrait à partir d'un certain rang à  $P_j$  et même à  $g(P_j) \subset g(W_3)$ , et donc serait dans  $g(W_3)$ , contredisant la définition de  $T$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $g^N(C)$  est un ensemble connexe dont l'intersection avec  $P_j$  est un voisinage de  $\alpha$  dans  $J \cap P_j$ . Pour tout point de  $P_j$ , ses itérées par  $g$  tendent vers  $\alpha$ , donc par un argument classique utilisant le fait que  $g^n$  contracte la métrique hyperbolique de  $V$ ,  $g^n(T)$  tend uniformément vers  $\alpha$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Maintenant,  $g^N(C) = \bigcup_{n \geq N} g^n(T)$ , donc  $g^N(C)$  tend également uniformément vers  $\alpha$  quand  $N \rightarrow +\infty$ . ■

Nous avons un lemme analogue pour l'application  $PB$ .

**Lemme 4.5** *Pour tout point  $z \in \partial\mathbb{D}$ , on définit l'ouvert  $U$  de la façon suivante :*

- si  $z$  n'est pas une préimage itérée de 1, soit  $U = \emptyset$ ,
- si un certain itéré de  $z$  tombe sur 1, alors il y a exactement deux cases d'échiquier dont le bord contient  $z$ . Soit  $U$  leur union.

*Alors  $z$  a une base de voisinages connexes dans  $\mathbb{D} \setminus U$ , dont chaque élément est l'adhérence d'une union de cases d'échiquier.*



La preuve est analogue, avec  $V$  remplacé par  $\mathbb{S}^2 \setminus [1/3, 3]$ , et  $W = \text{“Re}(z) < 0\text{”}$ .

Ces lemmes seront utilisés pour démontrer la connexité locale de certains ensembles de Julia-Lavaurs. La méthode que nous avons utilisé nous permet également de démontrer le

**Lemme 4.6** *Mis à part  $D^+$  et  $D^-$ , les composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$  sont bornées. En particulier, elles sont disjointes de leurs images par  $T_n$  ( $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ ). Le même énoncé tient pour les cases d'échiquier de  $K\mathcal{F}$  (avec  $E^b$  à la place de  $D^b$ ).*

**Preuve :** Les deux composantes  $D^+$  et  $D^-$  qui contiennent un demi-plan sont  $T_1$ -invariantes, et d'après le développement de la proposition 2.3, elles sont envoyées par  $\psi_{+,j}$  sur les deux composantes  $A$  et  $B$  du lapin qui sont attachées à  $\alpha$  et adjacentes à l'axe répulsif d'index  $j$  ( $j$  est l'index sous-entendu dans l'énoncé). Considérons l'ensemble  $W$  et l'application  $g$  précédemment introduits dans l'analyse du troisième cas du lemme 4.4 des voisinages de  $\alpha$ . Soit  $U = W \setminus g(W)$ . Les ensembles  $A$ ,  $B$ , et  $g^n(U)$  pour  $n \geq 0$ , recouvrent un voisinage de  $\alpha$  dans le pétale répulsif. Donc leurs images par  $\phi_{+,j}$  recouvrent l'image de ce voisinage, dont les translatés par les  $T_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  recouvrent  $\mathbb{C}$  (d'après le développement). Prenons  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand pour que  $g^n(U)$  soit contenu dans le pétale. Alors son image par  $\phi_{+,j}$  est bornée, et a ses images par les  $T_k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  qui recouvrent le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de  $D^+ \cup D^-$ . De plus, le bord de cette image ne rencontre pas  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$ . Cela implique que les composantes de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$  différentes de  $D^+$  et  $D^-$  sont bornées.

Du coup, les cases d'échiquier incluses dans de telles composantes sont bornées elles aussi. Étudions le cas des cases incluses dans  $D^\pm$ . Le bord de toute composante du lapin étant une courbe de Jordan, et  $\psi_{+,j} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  envoyant  $D^+$  sur une composante du lapin, et n'ayant pas de point critique sur son bord, le bord de  $D^+$  dans  $\mathbb{C}$  est une sous-variété topologique de dimension 1, et adhère à  $\infty$ . Donc le bord de  $D^+$  dans  $\mathbb{S}^2$  est une courbe de Jordan, donc l'isomorphisme  $\xi$  de la proposition 3.7 s'étend continûment aux bords en un homéomorphisme. On conclut avec le lemme 3.3. ■

Note : nous aurions également pu prouver ce dernier lemme en utilisant moins d'analyse combinatoire du lapin, avec l'aide de propriétés de revêtement de  $\psi_{+,j}$  au dessus de  $\alpha$ , que nous n'avons pas voulu mentionner ici.

**Lemme 4.7** *Pour toute composante connexe bornée  $C$  de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}_j$ ,  $C' = \psi_{+,j}(C)$  est une composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$ , et  $\psi_{+,j}$  est propre de  $C$  dans  $C'$ . L'ensemble  $D' = \psi_{+,j}(D^b)$  est la composante  $U_i$  attachée à  $\alpha$  et d'index  $i = j + b/2$ .*

**Preuve :**

Pour  $C$  :  $\psi_{+,j}$  est continue sur  $\overline{C}$ , envoie  $C$  dans une composante  $C''$  de  $\overset{\circ}{K}$  et envoie le bord de  $C$ , qui est inclus dans  $J\mathcal{F}$ , donc dans  $J$ , donc dans le bord de  $C''$ , donc

est propre de  $C$  dans  $C''$ . De plus elle est ouverte. Donc elle est surjective de  $C$  dans  $C'' : C' = C''$ .

Pour  $D^b$  : l'inclusion  $D' \subset U_i$  est une conséquence du développement de la proposition 2.3. Pour l'inclusion inverse, d'après la proposition 3.6, il suffit de prouver que  $\psi_{+,h}(\mathbb{H}) \supset \mathbb{D}$ . La fraction rationnelle  $PB$  n'a pas de point exceptionnel (voir [CG] pour la définition des points exceptionnels), donc pour tout ouvert rencontrant l'ensemble de Julia, qui est égal à  $\partial\mathbb{D}$ , ses images successives recouvrent  $\mathbb{C}$ . L'image de  $\psi_{+,h}$  est ouverte, stable par  $PB$  et contient certainement des points de  $\partial\mathbb{D}$ . Donc  $\psi_{+,h} = \mathbb{C}$ . Comme  $\psi_{+,h}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}) \subset \mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{D}$ , c'est que  $\psi_{+,h}(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ . ■

Note : nous aurions également pu prouver ce dernier lemme en utilisant les propriétés de revêtement de  $\psi_{+,j}$  de la proposition 2.12.

Quatrième partie

Disques de Siegel virtuels



## Introduction

Les preuves de la locale connexité (Petersen) et de la mesure nulle (Petersen-Lyubich) des ensembles de Julia des polynômes quadratiques ayant un point fixe indifférent de nombre de rotation de type constant, sont basées sur l'emploi d'un modèle quasiconforme  $\tilde{B}$ , dû à Douady, Ghys, Herman, Shishikura, . . . , construit par chirurgie holomorphe sur une fraction de Blaschke  $B$  avec l'aide d'un théorème de Herman et Świątek et d'un théorème d'Ahlfors et Beurling. Nous avons trouvé un analogue  $\beta$ , qui joue pour les applications de cornes (d'un polynôme quadratique avec un point fixe parabolique de nombre de rotation  $p/q$ ) le même rôle que  $B$  pour les polynômes quadratiques. Sa construction est géométrique et non donnée par une formule. En adaptant la chirurgie classique, nous obtenons un modèle  $\tilde{\beta}$ . La preuve que  $\tilde{\beta}$  est effectivement un modèle pour les applications de cornes  $h$  ayant en un des bouts un multiplicateur neutre de nombre de rotation  $\omega$  de type constant, est plus élaborée que dans le cas quadratique. Quand  $\omega$  est de type borné par  $M$ , alors nous déduisons du modèle que  $h$  a un disque de Siegel dont le bord est un  $K$ -quasicercle passant par le point critique principal associé à ce bout, avec  $K$  ne dépendant que  $M$  et pas de  $p/q$ . Nous tirons également quelques autres conséquences qui seront utilisées dans la partie "Un pas vers la mesure positive". Nous pensons que ce modèle permet de démontrer la locale connexité et la mesure nulle de l'ensemble de Julia-Lavaurs associé.

# 1. Théorèmes

Nous utiliserons les notations suivantes :

- le *cercle unité* désigne  $\partial\mathbb{D}$ , et le *cercle* désigne  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$
- $\forall p \wedge q = 1$ , on note  $P(z) = e^{i2\pi p/q}z + z^2$
- $J$  et  $K$  désignent les ensembles de Julia et de Julia rempli du polynôme  $P$ , ils dépendent de  $p/q$

On se référera à la partie III de la présente thèse pour les définition précises et les propriétés élémentaires des objets suivants, et les preuves des affirmations :

- $\forall p \wedge q = 1$ ,  $i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  indexe les axes et pétales attractifs du point parabolique 0 de  $P$
- $j \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  indexe les versions répulsives de ces objets
- $K^i$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{C}$  qui sont attirés par le pétale d'index  $i$  sous l'itération de  $P^q$  : c'est une union de composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}$
- nous mentionnerons parfois les cylindres attractifs ou répulsifs, c'est à dire  $2q$  versions du cylindre  $\mathcal{C}_{y\mathcal{L}} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$  distinguées par un index  $i$  ou  $j$ , et que nous noterons  $\mathcal{C}_{y\mathcal{L}_i}$  ou  $\mathcal{C}_{y\mathcal{L}_j}$  ; nous indexerons de même leurs revêtements universels  $\mathbb{C}_i$  et  $\mathbb{C}_j$
- $\psi_{+,j} : \mathbb{C}_j \rightarrow \mathbb{C}$  est la paramétrisation de Fatou étendue associée à l'index  $j$ , c'est une fonction holomorphe surjective
- $\phi_{-,i} : K^i \rightarrow \mathbb{C}_i$  est la coordonnée de Fatou étendue associée à l'index attractif  $i$ , c'est une fonction holomorphe surjective
- pour un nombre complexe donné  $\sigma$  et appelé *phase*, ainsi qu'un signe  $\nu \in \{-1, 1\}$  donnant la direction de l'implosion, on introduit des translations  $T_\sigma : \mathbb{C}_i \rightarrow \mathbb{C}_{i+\nu/2}$  (la phase est la même pour tous les index)
- toutes ces fonctions vérifient le diagramme commutatif 2.4 de III, que nous rapelons ci-dessous dans la figure 1.1
- $\phi_{\dot{+},j} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}_j$  est la réunion pour les  $q$  index  $i$  des fonctions  $T_t \circ T_\sigma \circ \phi_{-,i}$ , où  $T_t$  est la composée des flèches horizontales du diagramme commutatif ramenant  $\mathbb{C}_{i+\nu/2}$  à  $\mathbb{C}_j$  :  $t = \frac{d}{q}$  et  $0 \leq d < q$  est tel que  $j = i + \nu/2 + dp \bmod q$ .
- $h_{\sigma,j} = \phi_{\dot{+},j} \circ \psi_{+,j}$  dénote l'application de cornes associée au cylindre répulsif d'index  $j$  ; elle va d'un ouvert de  $\mathbb{C}_j$  dans  $\mathbb{C}_j$ , et dépend du choix de la phase  $\sigma \in \mathbb{C}$
- $K\mathcal{F}_j$  est la préimage de  $K$  par  $\psi_{+,j}$  ;  $J\mathcal{F}_j$  est la préimage de  $J$
- $J_L\mathcal{F}_j$  est l'ensemble de Julia-Lavaurs et  $K_L\mathcal{F}_j$  l'ensemble de Julia-Lavaurs rempli,

- associés à  $h_{\sigma,j}$
- Le symbole  $b$  dénotera soit 1 soit  $-1$ , et servira à désigner l'un des deux bouts du cylindre
  - $\overline{D}^b$  est la composante connexe de l'intérieur de  $K^\circ\mathcal{F}$  qui est un voisinage de  $b\mathbf{i}\infty$
  - $\overline{E}^b$  est la case d'échiquier de  $\overline{K}\mathcal{F}$  qui est un voisinage de  $b\mathbf{i}\infty$ ; son bord est une courbe de Jordan, incluse dans l'intérieur de  $\overline{K}\mathcal{F}$  (voir dans la partie III, le lemme 3.8);  $h$  est un isomorphisme de  $E^+$  vers un demi-plan supérieur délimité par la ligne horizontale passant par les points critiques de  $h$ , et  $h$  est un isomorphisme de  $E^-$  sur le demi-plan inférieur correspondant
  - le *point critique principal* supérieur (resp. inférieur) de  $\overline{h}$  est l'unique point critique appartenant au bord de la case d'échiquier supérieure  $\overline{E}^+$  (resp. inférieure  $\overline{E}^-$ )
  - la fonction  $\overline{h}$  se prolonge aux deux bouts en une application holomorphe  $\widehat{h}$ , qui les fixe avec un multiplicateur non nul
  - l'application de Lavaurs  $g$  correspond aux applications  $h$  vues dans le plan dynamique initial : voir la partie III

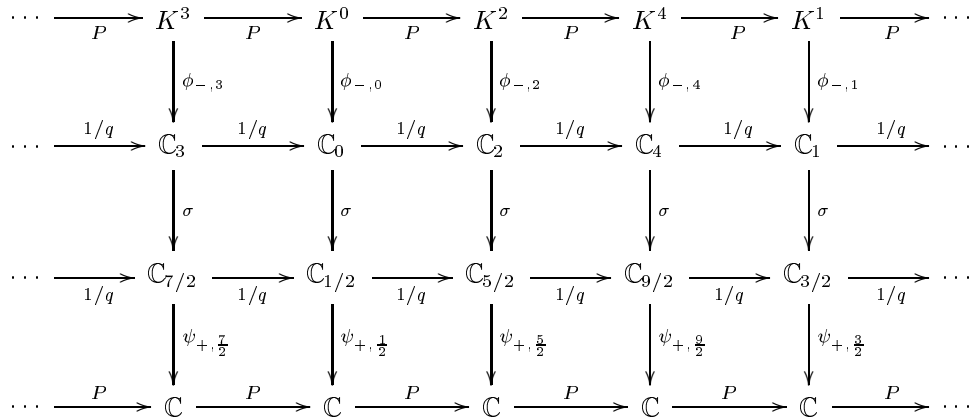


FIG. 1.1 – exemple de diagramme pour  $p/q = 2/5$  et  $\nu = 1$ ; une flèche portant le nombre complexe  $\sigma$  figure  $T_\sigma$

Peu importe peu dans quel cylindre on travaille, puisque dans les autres, les divers objets sont juste translétés. Nous choisissons donc l'un d'entre eux, et omettons son index  $j$  dans le reste de cette section.

Considérons le prolongement  $\widehat{h} = \widehat{h}_\sigma$ . Étant donné  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , et un des bouts  $b\mathbf{i}\infty$ , il y a une et une seule valeur de la phase  $\sigma \in \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}$  telle que  $\widehat{h}_\sigma$  ait multiplicateur  $\tau$  en  $b\mathbf{i}\infty$ , plus précisément  $\sigma = \sigma_b + b \ln(\tau)/i2\pi$  où la constante  $\sigma_b \in \mathcal{C}_{y\mathcal{L}}$  dépend des choix faits dans la définitions des cylindres. Nous allons considérer le cas où  $\tau = e^{bi2\pi\omega}$ , c'est à dire  $\sigma = \sigma_b + \omega$ , pour un certain  $\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Dans la section 2, pour tout  $\omega$  de type borné, nous fournissons un modèle quasiconforme  $\widetilde{\beta}_{\omega,b}$  (qui

dépend du réel  $\omega$  et du bout  $b$ ), nous permettant de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 1**

$\forall M > 0, \exists K = K(M) > 0$  tel que  $\forall p \wedge q = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$  irrationnel de type borné par  $M$ , et pour chacun des bouts  $b$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ , il existe un isomorphisme  $K$ -quasiconforme qui conjugue  $\tilde{\beta}_{\omega,b}$  à  $h_{\sigma_b+\omega}$ .

Notons que  $K$  ne dépend pas de  $p/q$ . Le modèle se trouve avoir des propriétés géométriques intéressantes qui permettent de tirer entre autres les conséquences suivantes :

**Corollaire 1.1**

*Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1, l'application de cornes  $\bar{h}$  possède un disque de Siegel  $\bar{\Delta}'$  au bout donné, dont le bord est un  $K$ -quasicercle passant par le point critique principal associé à ce bout.*

Noter que l'on obtient l'existence du disque de Siegel sans utiliser le théorème de Siegel. Les deux corollaires suivants, seront utilisés dans la partie "Un pas vers la mesure positive" :

**Corollaire 1.2**

*Le module de l'anneau entre le disque de Siegel et le domaine de définition de  $\bar{h}$  est plus grand que  $C(M) = m/K(M)$  où  $m$  est une constante universelle.*

Plus précisément,  $m$  ( $\approx 0.7$ ) est le module entre la case d'échiquier supérieure et le bord de l'ensemble de Julia dans les coordonnées de Fatou, module qui est indépendant de  $p/q$ .

**Corollaire 1.3**

*Soit  $\bar{V}_0$  le complémentaire de la composante de l'intérieur de  $\bar{K}\mathcal{F}$  qui contient un voisinage du bout  $\text{bi}\infty$ . La mesure de Lebesgue de  $\bar{V}_0 \cap \bar{h}^{-1}(\bar{\Delta}')$  est minorée par une constante  $C'(M)$  indépendante de  $p/q$ .*

En ce qui concerne les ensembles de Julia-Lavaurs dans le plan dynamique initial (celui du polynôme  $P_{p/q}$ ) :

**Corollaire 1.4 (dans le plan initial)**

*Les images par  $\psi_{+,j}$  des disques de Siegel  $\Delta'_j$  des fonctions  $\bar{h}_j$  forment un cycle pour  $P$  de  $q$  domaines de Jordan  $\Delta_i \subset K^i$  pour  $i = 0, \dots, q-1$  ( $i = j + b/2$ ), adhérent au point fixe  $0$  de  $P$ . On a  $P(\Delta_i) = \Delta_{i+p}$  et  $g(\Delta_i) = \Delta_{i+\frac{p+b}{2}}$ , et  $P$  et  $g$  sont des isomorphismes de  $\Delta_i$  sur leurs images. Il existe une forme de Beltrami  $\mu''$   $P$ -invariante d'ellipticité majorée par  $K(M)$  (le même que dans le théorème 1) et dont l'unique redressement  $s$  commutant avec  $P$  laisse fixe  $J(P)$  ainsi que tout*



point de la grande orbite critique et toute composante de  $\mathbb{C} \setminus J(P)$ , envoie la réunion des cases d'échiquier de signe  $b$  sur  $g^{-1}(\Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_{q-1})$ , et envoie le graphe de l'échiquier dans l'ensemble de Julia-Lavaurs  $J_L$ .

On appelle les  $\Delta_i$  les *disques de Siegel virtuels* de  $g$ .

Rappelons que [ADU] ont prouvé un résultat qui implique que  $J(P_{p/q})$  est de dimension de Hausdorff  $< 2$ , et que [MM] a démontré que pour  $\theta$  de type borné,  $J(P_\theta)$  est de dimension de Hausdorff  $< 2$ . Par analogie, nous faisons la conjecture suivante concernant le bord  $J_L\mathcal{F}$  de l'ensemble de Julia-Lavaurs  $K_L\mathcal{F}$  associé à  $h$ .

### Conjecture 1

*Le bord de l'ensemble de Julia-Lavaurs  $J_L\mathcal{F}$  de l'application de cornes du théorème 1 a une dimension de Hausdorff  $< 2$ .*

Notons que contrairement au cas des ensembles de Julia quadratiques, le bord d'un ensemble de Julia-Lavaurs ne peut pas être poreux, (au sens de McMullen dans [MM]), à cause des ailes de papillons. Je dois cette remarque à Michel Zinsmeister.

Nous pensons pouvoir démontrer les deux hypothèses suivantes, dont la première sera utilisée dans la partie "Un pas vers la mesure positive".

### Hypothèses 1

$\forall p \wedge q = 1, \forall \omega$  de type borné,  $\forall b \in \{-1, 1\}$ ,

*l'ensemble de Julia-Lavaurs correspondant est*

- *de mesure de Lebesgue nulle,*
- *localement connexe.*

La conjecture est liée à l'article [MM], et une preuve des deux hypothèses devrait être possible en adaptant à notre cadre les principes contenus dans [Ya]. L'article [Ya] propose une alternative à la preuve originale de Petersen [Pe1]. La présentation donnée dans [YaZ] pourra se révéler plus accessible.

De plus, nous avons une autre conjecture, liée à la persistance des cylindres d'Écalle (voir [DH]) : pour une petite perturbation du polynôme  $P$ , telle que le multiplicateur au même bout du cylindre perturbé reste constant (égal à  $\exp(bi2\pi\omega)$ ), nous conjecturons qu'alors le bord du disque de Siegel dans ce cylindre est peu perturbé. Par exemple il pourrait exister un certain  $K'$  tel que les bords des disques perturbés sont tous des  $K'$ -quasicercles qui convergent vers le bord du disque de Siegel du cylindre non perturbé, quand la perturbation tend vers 0.

### Notes

1. Dans cette partie, une fonction sous-entend son ensemble de définition. Ainsi, l'égalité entre deux fonctions signifie qu'ils ont le même ensemble de définition

- (et la même valeur en tout point de cet ensemble). La composée  $g \circ f$  de deux fonctions est la fonction dont l'ensemble de définition est  $\{x \in \text{Def}(f) \mid f(x) \in \text{Def}(g)\}$  et dont la valeur en  $x$  est  $g(f(x))$ .
2. Par homéomorphisme quasiconforme (ou application quasirégulière), nous sous-entendons toujours préservant l'orientation.
  3. Soient  $S_1, S_2$  des surfaces de Riemann,  $U \subset S_1$  et  $f : U \rightarrow S_2$  une fonction quasirégulière. Nous dirons qu'une forme de Beltrami  $\mu$  définie sur  $S_1$  admet un "push-forward" par  $f$  si et seulement si il existe une forme de Beltrami  $\mu'$  telle que pour presque tout  $x \in U$ ,  $T_x f$  transporte  $\mu(x)$  en  $\mu'(f(x))$  (rappelons qu'une application quasirégulière est différentiable presque partout sur son ensemble de définition). Si  $f$  est surjective, la forme de Beltrami  $\mu'$  est unique.
  4. Les diagrammes commutatifs de cette partie sont à interpréter de la façon suivante :
    - ce sont des graphes orientés dont les sommets sont indexés par des ensembles et les flèches par des fonctions
    - les ensembles situés sur les sommets doivent contenir l'ensemble de définition de chaque flèche en partant, ainsi que l'image de chaque flèche y arrivant
    - pour tous sommets  $A$  et  $B$  et tout couple de chemins  $f_0, \dots, f_n$  et  $g_0, \dots, g_m$  de  $A$  vers  $B$ , alors  $f_n \circ \dots \circ f_0 = g_m \circ \dots \circ g_0$  en tant que fonctions (en particulier ils ont le même ensemble de définition) ; note : nous n'incluons pas le chemin vide de  $A$  vers  $A$ —associé à l'identité sur  $A$ —comme un chemin valide.
  5. Nous rencontrerons également des diagrammes commutatifs dont les sommets sont indexés par des formes de Beltrami. Ces diagrammes sont à interpréter comme suit : toutes les flèches sont quasirégulières et pour toute flèche  $f$  de  $\mu$  vers  $\mu'$ ,  $\mu'$  est un "push-forward" de  $\mu$ .
  6. Un homéomorphisme  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  sera dit  $k$ -quasisymétrique si et seulement s'il est croissant et pour tous intervalles  $I_1, I_2$  de  $\mathbb{T}$  de même longueur et possédant bout commun, le quotient des longueurs de  $f(I_1)$  et  $f(I_2)$  est inférieur ou égal à  $k$  (par intervalle de  $\mathbb{T}$ , nous entendons un sous-ensemble connexe d'intérieur non vide et non égal à  $\mathbb{T}$ ). Il s'agit d'une définition qui n'est pas invariante par transformation de Möbius du cercle. La classe des homéomorphismes  $k$ -quasisymétriques de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{T}$  est compacte pour la convergence uniforme.

## 2. Construction du modèle

Dans la première partie de cette section, nous définissons sur  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  une fonction  $\overline{\beta}$ , qui jouera le même rôle de modèle pour les applications de Lavaurs que jouait la fraction de Blaschke  $B(z) = z^2 \frac{z-3}{1-3z}$  pour les polynômes quadratiques. Mais plutôt que d'utiliser une formule, la construction est géométrique. Elle est inspirée par une analogie avec la construction géométrique de  $B$ , que nous avons incluse en appendice, section 4.1.

Dans la deuxième partie, étant donné un irrationnel  $\omega$  de type borné par un certain  $M \in \mathbb{N}^*$ , nous effectuons sur  $\overline{\beta}$  la même chirurgie que celle qu'on fait Douady, Ghys, Herman, Shishikura et d'autres sur  $B$ , ce qui permet de définir un modèle modifié  $\tilde{\beta}$ , application quasiconforme qui préserve une forme de Beltrami de rapport de dilatation majoré par une constante  $K$  ne dépendant que de  $M$  et pas de  $p/q$ .

**Remarque** : Devant le grand nombre de notations introduites tout au long de cette section et de la suivante, nous avons décidé de signaler dans la marge la définition de chaque nouvel objet, de la façon illustrée ci-contre.

Def : Def

### 2.1 Le modèle

Nous fixons  $p$  et  $q$ , et choisissons l'un des  $q$  cylindres répulsifs, appelons  $j_0$  son index, et travaillerons dedans. Pour ne pas alourdir des notations déjà encombrées, nous omettrons l'index  $j_0$ . En particulier,  $h_\sigma = h_{\sigma, j_0}$  et  $K\mathcal{F} = K\mathcal{F}_{j_0}$  (voir la section 1 pour un rappel des notations, et la section 2 de la partie III de la présente thèse pour plus de détails).

A partir de maintenant, nous traiterons le cas  $b = 1$ . Le cas  $b = -1$  est analogue. Rappelons que d'après le lemme 3.8 de la partie III, le bord de  $\overline{E}^+$  est une courbe de Jordan incluse dans l'intérieur de  $\overline{K\mathcal{F}}$ . Soit l'ouvert  $L = \mathbb{C} \setminus \overline{E}^+$ . Comme  $\overline{E}^+ \cup \{\mathbf{i}\infty\}$  est un domaine de Jordan, l'ensemble  $\overline{L} \cup \{-\mathbf{i}\infty\}$  l'est également. Envoyons le demi-cylindre inférieur “ $\text{Im}(z) < 0$ ” sur  $\overline{L}$  par un isomorphisme conforme  $\overline{\zeta}$  (cet isomorphisme existe et est unique à pré-composition près par une translation de vecteur réel). Il a un relevé  $\zeta$ , qui est un isomorphisme conforme entre  $-\mathbb{H}$  et  $L$ , et commute avec  $T_1$ . Considérons alors la composition

Def :  $\beta$  sur  $-\mathbb{H}$ 

$$\beta = h_\sigma \circ \zeta$$

L'ensemble de définition de  $\beta$  est  $\zeta^{-1}(\overset{\circ}{K}\mathcal{F}) \subset -\mathbb{H}$ . Le bord de  $E^+$  étant contenu dans  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$ , l'ensemble  $\text{Def}(\beta)$  contient une bande de la forme " $-\varepsilon < \text{Im}(z) < 0$ ", et  $\beta(z)$  tend vers une certaine ligne horizontale " $\text{Im}(z) = a$ " quand  $z \rightarrow \mathbb{R}$ . Puisque  $h_{\sigma'} = T_{\sigma'-\sigma} \circ h_{\sigma}$ , on peut imposer que  $a = 0$ , en imposant la partie imaginaire de  $\sigma$ . Par réflexion de Schwarz,  $\beta$  s'étend holomorphiquement sur  $\mathbb{R}$  et au delà. À partir de maintenant,  $\beta$  désignera cette extension.

Def :  $\beta$

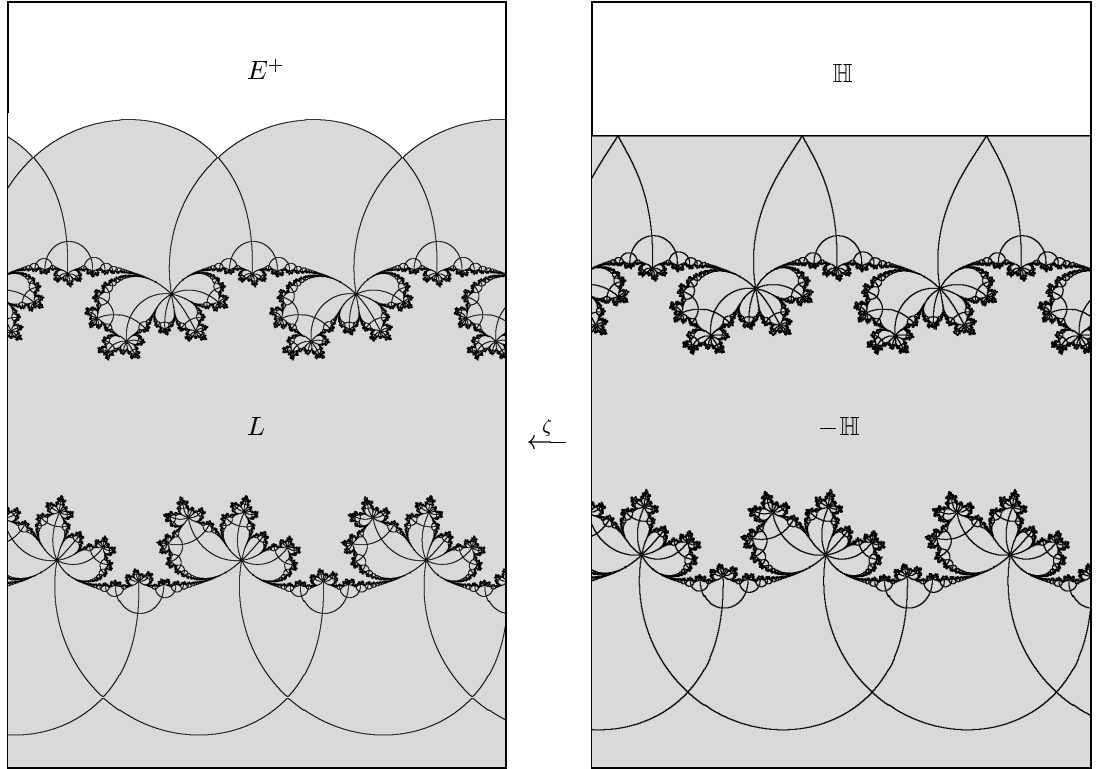


FIG. 2.1 – La fonction  $\zeta$  pour  $p/q = 2/5$ , dans le cas  $b = 1$  : elle envoie  $-\mathbb{H}$  sur  $L$ . La distortion est très faible sauf près de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.1** *La restriction de  $\overline{\beta}$  à  $\mathbb{T}$  est analytique, strictement croissante, et a un seul point critique, de degré local 3.*

**Preuve :** Nous utilisons le fait que  $\zeta$  se prolonge continûment en un homéomorphisme  $\overline{\zeta}$  de  $-\overline{\mathbb{H}}$  sur  $\overline{L}$  (car  $\overline{L} \cup \{-i\infty\}$  est un domaine de Jordan). L'analyticité de  $\beta$  sur  $\mathbb{R}$  est triviale. D'autre part, comme  $h_{\sigma} \circ \zeta$  commute avec  $T_1$ , on en déduit que  $\beta$  aussi. Pour l'injectivité, on utilise le fait que  $\beta|_{\mathbb{R}} = h \circ \overline{\zeta}|_{\mathbb{R}}$  et que  $h$  est injective sur  $\partial E^+$  (car c'est un r.d.r au dessus de  $\mathbb{C}$  qui est injectif sur  $E^+$ , voir la section 1 de la partie III).

Reste à étudier les points critiques. Soit  $c_0 \in \partial E^+ = \partial L$  un point critique de  $h$ ,  $c_1 = \overline{\zeta}^{-1}(c_0)$  et  $v_0 = h(c_0) \in \mathbb{R}$ . L'image réciproque par  $h_{\sigma} \circ \zeta$  d'un point proche de  $v_0$  et situé dans  $\mathbb{H}$  (donc distinct de  $v_0$ ) possède un seul point proche de  $c_1$ . Si  $v_0$

est situé dans  $-\mathbb{H}$ , il y en a 2. De là, on déduit que pour tout point proche de  $v_0$  et non situé sur  $\mathbb{R}$  a exactement 3 préimages par  $\beta$  proches de  $c_1$ . Cela prouve que le degré local de  $c_1$  pour  $\beta$  est 3. On fait de même pour un point de  $\partial E^+$  qui n'est pas critique, et on obtient un degré local égal à 1.

Note : le sens mathématique précis de “tout point proche et différent de  $y_0$  a exactement  $n$  préimages par  $f$  proches de  $x_0$ ” est défini dans la partie III, section 1 ; pour mémoire, cela signifie  $(\forall W \in \mathcal{V}(y_0)) (\forall V \in \mathcal{V}(x_0)) (\exists W' \in \mathcal{V}(y_0)) (\exists V' \in \mathcal{V}(x_0))$  tels que  $W' \subset W$ ,  $V' \subset V$ , et  $\forall y \in W' \setminus \{y_0\}$ ,  $V' \cap f^{-1}(\{y\})$  possède exactement  $n$  éléments. ■

Donc  $\overline{\beta}|_{\mathbb{R}}$  est une “holomorphic circle map” dans la terminologie de [Ya].

## 2.2 Le modèle modifié

Nous utiliserons les faits suivants :

### Proposition 2.2 (Ahlfors, Beurling)

Il existe une fonction  $K(k) : ]1, +\infty[ \rightarrow ]1, +\infty[$  telle que  $K(k) \xrightarrow[k \rightarrow 1]{} 1$ , et telle que pour tout homéomorphisme  $k$ -quasisymétrique  $f$  du cercle unité dans lui-même, il existe un homéomorphisme  $K$ -quasiconforme  $F$  de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  qui prolonge  $f$  par continuité et qui **de plus** fixe 0.

Il s'agit d'une version améliorée de la version pour le disque  $\mathbb{D}$  du théorème de [AB], et qui s'en déduit (en effet, la classe des homéomorphismes  $K$ -quasiconformes de  $\mathbb{D}$  dont le prolongement au bord est  $k$ -quasisymétrique est compacte pour la convergence uniforme : en particulier elle envoie 0 dans un compact de  $\mathbb{D}$ ; on peut alors la ramener en 0 en post-composant avec un difféomorphisme  $\mathcal{C}^\infty$ , d'ellipticité bornée, et égal à l'identité sur un voisinage fixe de  $\partial\mathbb{D}$ ). Notons que par  $k$ -quasisymétrique nous entendons la définition non Möbius-invariante (voir les notes à la fin de la partie 1).

### Proposition 2.3 (Herman, Świątek, 1987)

Pour tout voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , pour tous  $A, A' > 0$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $\rho > 0$  et  $M \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $c = c(W, A, A', l, \rho, M)$  telle que pour tout homéomorphisme croissant  $f$  de  $\mathbb{T}$  qui est  $C^1$  avec un unique point critique 0, si

1.  $f$  est  $C^3$  sur  $W$  et a une dérivée Schwarzienne  $Sf$  négative sur  $W \setminus \{0\}$
2.  $\forall x \in W$ ,  $A|x|^{2l} \leq f'(x) \leq A'|x|^{2l}$
3. la variation de  $\log f'$  sur  $\mathbb{T} \setminus W$  est bornée par  $\rho$
4. le nombre de rotation de  $f$  est un irrationnel  $\omega$  de type borné par  $M$

alors  $f$  est  $c$ -quasisymétriquement conjuguée à la rotation d'angle  $\omega$  sur  $\mathbb{T}$ .

Cet énoncé est adapté de [Pe2]. Citons également [He] et [Sw].

**Lemme 2.4 (Recollement d'applications quasiconformes)** *Soient  $U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{C}$ , et  $f : U \rightarrow V$  un homéomorphisme. Soit  $U_+ = U \cap \mathbb{H}$  et  $U_- = U \cap -\mathbb{H}$ . Si les deux restriction de  $f$  à respectivement  $U_+$  et  $U_-$  sont  $K$ -quasiconformes, alors  $f$  est  $K$ -quasiconforme sur  $U$ .*

On trouvera une preuve d'un théorème bien plus général dans [V].

Soit  $h_{PB} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  l'application de cornes du produit de Blaschke  $PB(z) = \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3}$  (ces objets sont définis dans la partie III, section 3). Comme  $h$ , elle dépend du choix d'une phase. Rappelons la

**Proposition 2.5 (Universalité des applications de cornes au dessus de  $\mathbb{C}$ )**  $\forall p \wedge q = 1$ , et pour  $b = 1$  (resp.  $-1$ ), il existe un choix de la phase pour  $h_{PB}$  et un isomorphisme analytique  $\xi^b$  de  $D^b$  dans  $\mathbb{H}$  (resp.  $-\mathbb{H}$ ) qui commute avec  $T_1$ , et tels que  $h_{PB} \circ \xi^b = h_\sigma|_{D^b}$ .

Def :  $\xi$

Voir la dans partie III, la proposition 3.7, section 3, pour une preuve et des explications.

Nous commençons notre construction avec la

**Proposition 2.6**  $\overline{\beta}|_{\mathbb{T}}$  a des dérivées universellement bornées, au sens où elle vérifie les hypothèses 1. à 3. du théorème 2.3 (Herman, Świątek) pour un choix universel des constantes (ne dépendant pas de  $p/q$ ).

**Preuve :** La construction (enlever la case d'échiquier supérieure, uniformiser le reste sur un demi-plan, composer avec l'application de cornes et faire une réflexion de Schwarz) peut être effectuée pour l'application de cornes  $\overline{h}_{PB}$  du produit de Blaschke  $PB$ , et donne des applications  $\overline{\zeta}_{PB}$  et  $\overline{\beta}_{PB}$ . Soit  $A' = \zeta^{-1}(D^+)$ , et  $A = A' \cup \mathbb{R} \cup s(A')$  où  $s(z) = \bar{z}$ . L'anneau  $\overline{A}$  fait le tour de  $\mathcal{C}_{y\mathcal{L}}$ , possède  $\mathbb{T}$  comme bord supérieur, et dépend de  $p/q$ . On peut de même considérer  $A'_{PB} = \zeta_{PB}^{-1}(D_{PB}^+)$ , et  $A_{PB} = A'_{PB} \cup \mathbb{R} \cup s(A'_{PB})$ . L'anneau  $\overline{A}_{PB}$  est indépendant de  $p/q$  puisque défini uniquement en termes de  $PB$ . Son module est  $2m$  pour une certaine constante universelle  $m$  ( $\approx 0.7$ ). Avec les notations de la proposition 2.5 d'universalité, considérons la fonction  $\overline{\gamma}_0 = \overline{\zeta}_{PB}^{-1} \circ \overline{\xi} \circ \overline{\zeta}$ . C'est un isomorphisme analytique de l'anneau  $\overline{A}'$  vers  $\overline{A}'_{PB}$ , qui tend vers  $\mathbb{T}$  sur  $\mathbb{T}$ . Nous pouvons donc étendre  $\overline{\gamma}_0$  par réflexion de Schwarz en un isomorphisme analytique  $\overline{\gamma}$  de l'anneau  $\overline{A}$  vers  $\overline{A}_{PB}$ . Le module (commun) de ces deux anneaux étant universel et  $\mathbb{T}$  étant leur géodésique centrale, les fonction  $\overline{\gamma}$  et  $\overline{\gamma}^{-1}$  ont donc des dérivées universellement bornées à tous ordres (la borne ne dépendant que de l'ordre de la dérivée), au sens où

Def :  $m$

Def :  $\gamma, A$

$\left\{ \max |\overline{\gamma}^{(n)}(x)| \mid x \in \mathbb{T} \right\}$  est borné. On a alors

$$\overline{\beta}|_A = \overline{\beta}_{PB} \circ \overline{\gamma}$$

Cela fournit les bornes universelles sur  $\overline{\beta}|_{\mathbb{T}}$  recherchées : le seul point non trivial est que la dérivée schwarzienne reste strictement négative sur un voisinage du point critique. Cela provient de la formule  $S(f \circ g) = Sg + g'^2 \times ((Sf) \circ g)$ , du fait que  $f = \beta_{PB}$  étant analytique,  $Sf \sim -\frac{4}{x^2}$  quand  $x \rightarrow 0$ , alors que pour  $g = \gamma$ ,  $Sg$  et  $g'$  restent universellement bornées. ■

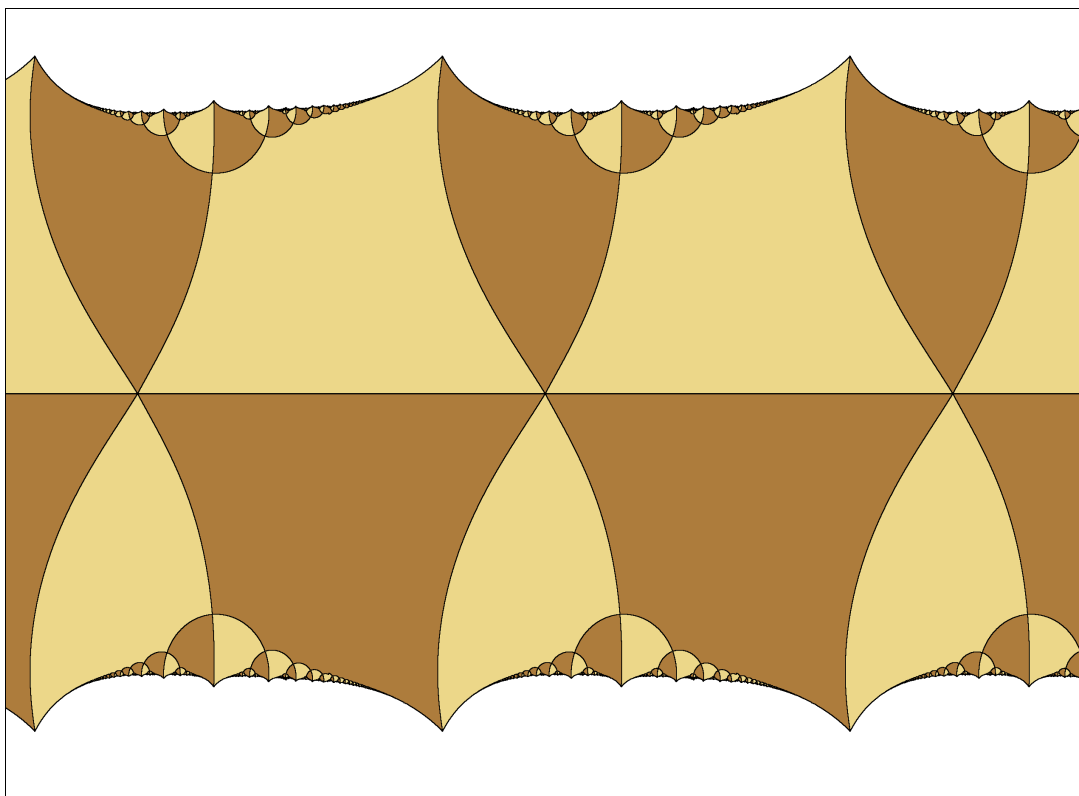


FIG. 2.2 – L’anneau  $A$ , rempli avec l’échiquier de  $\beta$ , pour  $p/q = 2/5$  et  $b = 1$ .

Soit  $\omega \in \mathbb{R}$  un irrationnel de type borné par  $M$ . Parmi les choix faits dans la définition de  $\beta$ , il y avait un paramètre  $\sigma$ , qui peut prendre n’importe quelle valeur dans une certaine ligne horizontale. Changer  $\sigma$  en  $\sigma + x$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ , revient à changer  $\beta$  en  $T_x \circ \beta$ . D’après la théorie du nombre de rotation, il existe une et une seule valeur de  $x$ , donc de  $\sigma$ , modulo  $\mathbb{Z}$ , telle que  $\overline{\beta}|_{\mathbb{T}}$  ait pour nombre de rotation le nombre irrationnel  $\omega$  modulo  $\mathbb{Z}$  (voir par exemple [dMvS], Ch. 1, § 4 ; nous n’avons pas besoin que  $\omega$  soit de type borné pour que cela soit vrai). D’après le théorème de Herman-Świątek (proposition 2.3),  $\overline{\beta}|_{\mathbb{T}}$  est alors  $k = k(M)$  quasisymétriquement conjugué à  $T_\omega$  sur  $\mathbb{T}$ . Appelons  $\overline{\eta} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  la conjugaison, et  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relevé.

Il existe un unique choix de  $\sigma$  dans sa classe modulo  $\mathbb{Z}$  tel que

$$\eta \circ \beta|_{\mathbb{R}} \circ \eta^{-1} = T_\omega|_{\mathbb{R}}$$

Nous savons d'après le théorème d'extension d'Ahlfors-Beurling (proposition 2.2), que  $\overline{\eta}$  admet un prolongement continu au demi-cylindre supérieur fermé en un homéomorphisme  $\widetilde{\eta} : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$  qui est  $K = K(k)$  quasiconforme sur  $\overline{\mathbb{H}}$  et fixe  $+i\infty$ .  
 Nous appelons  $\widetilde{\eta} : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$  l'unique relevé de  $\overline{\eta}$  qui prolonge  $\eta$  (voir section 4.2).

Def :  $\widetilde{\eta}$

Note : plus généralement, le symbole  $\widetilde{\phantom{x}}$  dénote un prolongement ou une modification, et le symbole  $\overset{\circ}{\phantom{x}}$  est un raccourci pour l'application quotient d'une modification  $\overset{\circ}{\phantom{x}}$ .

Def :  $\widetilde{\beta}$

Nous définissons une modification par chirurgie  $\widetilde{\beta}$  de  $\beta$ , par

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}|_{-\overline{\mathbb{H}}} &= \beta|_{-\overline{\mathbb{H}}} \\ \widetilde{\beta}|_{\overline{\mathbb{H}}} &= \widetilde{\eta}^{-1} \circ T_\omega \circ \widetilde{\eta} \end{aligned}$$

La fonction  $\widetilde{\beta}$  possède la dynamique que nous recherchons. Prouvons qu'elle est quasirégulière : étendons d'abord  $\zeta$  en une application  $\widetilde{\zeta}$  en posant

Def :  $\widetilde{\zeta}$

$$\widetilde{\zeta}|_{\overline{\mathbb{H}}} = (h_\sigma|_{E^+})^{-1} \circ \beta|_{\overline{\mathbb{H}}}$$

Avec cette définition, nous avons la propriété suivante :

$$\widetilde{\beta} = h_\sigma \circ \widetilde{\zeta}$$

La fonction  $\widetilde{\zeta}$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui commute avec  $T_1$ , et est quasiconforme d'après le lemme 2.4. Donc  $\widetilde{\beta}$  est quasirégulière. Nous pouvons aisément définir une forme de Beltrami  $\mu_0$  invariante par  $\widetilde{\beta}$  et  $T_1$ , et de dilatation bornée par  $K$ , en faisant un "pull-back" par  $\widetilde{\eta}$  de la forme nulle sur  $\mathbb{H}$  (qui est  $T_\omega$ -invariante), puis, le demi-plan supérieur étant stable par  $\widetilde{\beta}$ , en la complétant à tout le plan en une forme de Beltrami  $\widetilde{\beta}$ -invariante  $\mu$ , nulle en dehors des préimages itérées de  $\mathbb{H}$  par  $\widetilde{\beta}$ . (La construction est classique : pour tout  $z$ , soit un certain itéré  $z' = \beta^k(z)$  tombe dans  $\mathbb{H}$ , et alors nous tirons  $\mu$  en arrière par l'application holomorphe  $\beta^k$ , soit il n'y tombe jamais, éventuellement parce qu'il n'est pas défini pour un certain  $k$ , et alors nous posons  $\mu(z) = 0$ ). Comme  $\widetilde{\beta}$  commute avec  $T_1$ , et comme  $\mu_0$  est  $T_1$ -invariante, la définition de  $\mu$  implique que  $\mu$  est  $T_1$ -invariante.

Def :  $\mu$

Résumons ce que nous avons obtenu : pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , irrationnel de type borné par  $M$ ,

- une constante  $K$  ne dépendant que de  $M$  (et pas de  $p/q$ )
- un homéomorphisme  $K$ -quasiconforme  $\widetilde{\zeta}$  de  $\mathbb{C}$  qui commute avec  $T_1$ , est conforme sur  $-\mathbb{H}$ , et envoie  $\mathbb{H}$  sur  $E^+$
- une application quasirégulière  $\widetilde{\beta}$  de  $\widetilde{\zeta}^{-1}(K^\circ\mathcal{F})$  vers  $\mathbb{C}$ , qui commute avec  $T_1$



- une forme de Beltrami  $\mu$ , de rapport d'ellipticité majoré par  $K$ ,  $\tilde{\beta}$ -invariante et  $T_1$ -invariante
- $\tilde{\zeta}^{-1}(K\mathcal{F})$  est l'union disjointe de  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{R}$ , et  $\zeta^{-1}(K\mathcal{F})$
- $\tilde{\beta} = h_\sigma \circ \tilde{\zeta}$
- $\tilde{\beta}|_{\overline{\mathbb{H}}}$  (resp.  $\tilde{\beta}|_{\mathbb{R}}$ ) laisse  $\overline{\mathbb{H}}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) invariant et est conjuguée à  $T_\omega|_{\overline{\mathbb{H}}}$  (resp.  $T_\omega|_{\mathbb{R}}$ ) par un certain homéomorphisme quasiconforme (resp. quasisymétrique)  $\tilde{\eta}$  (resp.  $\eta$ ) qui commute avec  $T_1$
- $\tilde{\beta}|_{\mathbb{T}}$  est une application analytique critique du cercle (c'est à dire un homéomorphisme strictement croissant de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathbb{T}$  qui est  $\mathbb{R}$ -analytique et a exactement un point critique, de degré local 3) qui a nombre de rotation  $\omega \pmod{\mathbb{Z}}$

## 3. Preuves

### 3.1 Théorème 1

Esquisse :

Dans la section 2.2, nous avons construit une application quasirégulière  $\tilde{\beta}$  et une forme de Beltrami  $\tilde{\mu}$  qu'elle préserve. Redressons  $\tilde{\mu}$  : cela conjugue  $\tilde{\beta}$  en une application holomorphe  $\tilde{l}$ . Pour prouver que  $\tilde{l}$  est une application de cornes, nous utiliserons une forme de rigidité. Pour cela nous conjugurons d'abord notre modèle  $\tilde{\beta}$  par l'homéomorphisme quasiconforme  $\tilde{\zeta}$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ . Cela donne une fonction  $\tilde{H}$ , qui préserve une certaine forme de Beltrami  $\tilde{\mu}'$ , et en redressant  $\tilde{\mu}'$  par une application  $\tilde{r}$ , on conjugue  $\tilde{H}$  à  $\tilde{l}$ . La propriété  $\tilde{\beta} = \tilde{h}_\sigma \circ \tilde{\zeta}$  implique une forme de compatibilité entre  $\tilde{H}$  et  $\tilde{h}$  (par exemple ils ont les mêmes fibres), ce qui permet avec le diagramme 1.1 de pousser la forme de Beltrami  $H$  et  $T_1$  invariante  $\mu'$  par la coordonnée de Fatou répulsive  $\psi_+$ , en une forme  $P$ -invariante. Nous la redressons alors : par rigidité, le redressement conjugue  $P$  à lui-même. De là, nous déduisons qu'un bon choix de  $\tilde{r}$  envoie une fibre de  $\tilde{h}$  sur une fibre de  $\tilde{h}$ . Donc  $\tilde{l}$  est lui-même compatible avec  $\tilde{h}$ , i.e. nous avons la factorisation suivante :  $\tilde{l} = \tilde{t} \circ \tilde{h}_\sigma$  pour une certaine fonction  $\tilde{t}$ . Nous prouvons ensuite que  $\tilde{t}$  est d'une part un homéomorphisme, d'autre part holomorphe. Donc ce ne peut être qu'une translation. QED.

Preuve détaillée :

A plusieurs reprises nous utiliserons le développement suivant, (voir la proposition 2.3 dans la partie III)

**Proposition 3.1 (Développement asymptotique)** *Il existe un changement de coordonnées  $z \mapsto w$ , défini au voisinage de 0, fixant ce dernier avec dérivée 1, et une constante  $a \in \mathbb{C}$ , tels que dans les coordonnées*

$$W = -1/qCw^q$$

*l'application  $W \mapsto \phi(z)$ , où  $\phi$  désigne l'un des  $\phi_{-,i}$  (resp.  $\phi_{+,j}$ ), a son domaine de définition qui contient un ensemble étendu à l'infini avec direction asymptotique  $\mathbb{R}_-$*

(resp.  $\mathbb{R}_+$ ) et sur lequel

$$\phi(z) = W + a \ln(W) + c + O(1/W)$$

où  $c$  dépend de  $\phi$ . Comme corollaire, les images de ces ensembles sont étendus à l'infini avec même direction asymptotique.

Soit

Def :  $H$

$$H = \tilde{\zeta} \circ \tilde{\beta} \circ \tilde{\zeta}^{-1}$$

et soit  $\mu'$  le “push forward” de  $\mu$  par  $\tilde{\zeta}$ ;  $\mu'$  est invariant en avant par  $H$  et  $T_1$ . La fonction  $\tilde{\zeta}$  étant quasiconforme,  $H$  est quasirégulière. Nous avons le diagramme commutatif suivant (voir page 125 pour l'interprétation d'un tel diagramme)

$$\begin{array}{ccc} \mu' & \xrightarrow{H} & \mu' \\ \tilde{\zeta} \uparrow & \searrow h_\sigma & \uparrow \tilde{\zeta} \\ \mu & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mu \end{array}$$

Le rapport de dilatation de  $\mu'$  est borné par la même constante  $K$  qui borne celui de  $\mu$  : en effet,  $\mu'$  est nulle en dehors de  $\text{Def}(h)$ , et d'après le diagramme précédent, sur  $\text{Def}(h)$ , c'est le “pull-back” de  $\mu$  par  $h$ , qui est holomorphe.

Nous passons maintenant au plan dynamique de  $P$ , par la fonction  $\psi_+$ . Rappelons que cette fonction est surjective de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  (voir la partie III, lemme 2.13).

**Lemme 3.2**  $\mu'$  admet un (unique) “push-forward”  $\mu''$  par  $\psi_+$ , de rapport de dilatation borné par  $K$ . Def :  $\mu''$

**Preuve** : Aux points de  $z \in C \stackrel{\text{def}}{=} \psi_+^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}) = \mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}\mathcal{F}$ , on a  $\mu'(z) = 0$ . La fonction  $h_\sigma$  est une post-composée de  $\psi_+$ , et définie exactement sur le complément de  $C$ . Il suffit donc de prouver que  $\mu'$  a un “push forward” par  $h_\sigma$  : c'est une conséquence du premier diagramme de cette section ( $\mu$  est un push-forward de  $\mu'$  par  $h_\sigma$ ). L'unicité provient de la surjectivité de  $\psi_+$ . ■

Plus précisément,  $\mu''$  vérifie :  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\mu''(z) = \psi_{+*}(\mu'(w))$ , où  $w$  est n'importe quelle préimage non critique de  $z$  par  $\psi_+$ , si elle existe. En fait, une telle préimage existe, sauf pour éventuellement un ensemble dénombrable de valeurs de  $z$  : les valeurs postcritiques des  $P$ .

Puisque  $\mu'$  est  $T_1$ -invariante,  $\mu''$  est  $P^q$ -invariante. Mais en fait on a mieux :

**Lemme 3.3**  $\mu''$  est  $P$ -invariante.

**Preuve** :

Souvenons-nous que nous travaillons dans l'un des cylindres répulsif, d'index  $j_0$ .

En premier lieu, démontrons que  $\phi_{\pm, j_0}$  pousse  $\mu''$  sur  $\mu$ . Par définition,  $h_{\sigma, j_0} = \phi_{\pm, j_0} \circ \psi_{+, j_0}$ . Par définition de  $\mu''$ ,  $\psi_{+, j_0}$  pousse  $\mu'$  sur  $\mu''$ . Par le diagramme de la page 135,  $h_{\sigma, j_0}$  pousse  $\mu'$  en  $\mu$ . Enfin  $\psi_{+, j_0}(\text{Def}(h)) = \text{Def}(\phi_{\pm, j_0})$ , et  $\mu'$  est nulle en dehors de  $\text{Def}(h)$  et  $\mu''$  est nulle en dehors de  $\text{Def}(\phi_{\pm, j_0})$ . D'où le résultat.

Deuxièmement, remarquons que  $\mu''$  est nulle sur l'ensemble  $P$ -invariant  $\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}$ , ce qui prouve la  $P$ -invariance de  $\mu''$  sur  $\mathbb{C} \setminus \overset{\circ}{K}$ .

Troisièmement, pour tout  $z \in K^i$  (donc  $P(z) \in K^{i+p}$ ) qui n'appartient pas à la grande orbite critique de  $P$ , soient  $w$  et  $w' \in \mathbb{C}$  tels que  $\psi_{+, j_0}(w) = z$ , et  $\psi_{+, j_0}(w') = P(z)$  ( $\psi_{+, j_0}$  est surjective). Nous avons mentionné dans la partie III, page 94, la propriété suivante :  $\forall z \in K^i$ ,  $\phi_{\pm, j_0} \circ P(z) = T_k \circ \phi_{\pm, j_0}(z)$ , avec  $k = 1$  si  $i = j_0 - \nu/2$ , et  $k = 0$  sinon. Donc on a le diagramme commutatif suivant au voisinage de  $z$  :

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\phi_{\pm}} & h_{\sigma}(w) \\ P \downarrow & & \downarrow T_k \\ P(z) & \xrightarrow{\phi_{\pm}} & h_{\sigma}(w') \end{array}$$

chaque flèche étant un difféomorphisme analytique local. Pour prouver que l'application linéaire tangente à  $P$  en  $z$  transporte  $\mu''(z)$  sur  $\mu''(P(z))$ , il suffit de prouver que c'est le cas pour chaque autre flèche du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} \mu''(z) & \xrightarrow{\phi_{\pm}} & \mu(h_{\sigma}(w)) \\ P \downarrow & & \downarrow T_k \\ \mu''(P(z)) & \xrightarrow{\phi_{\pm}} & \mu(h_{\sigma}(w')) \end{array}$$

Cela vient du premier point, et de la  $T_1$ -invariance de  $\mu$ . ■

Def :  $s$

Soit  $s$  un redressement de  $\mu''$ . L'homéomorphisme quasiconforme  $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  conjugue  $P$  en une application holomorphe  $Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , qui est un polynôme. Par rigidité (voir l'appendice, section 4.3), cette application est  $\mathbb{C}$ -affinement conjuguée à  $P$ . On peut donc choisir  $s$  de sorte que  $Q = P$  :

$$P = s \circ P \circ s^{-1}$$

la fonction  $s$  laisse  $K^i$  invariant, ainsi que tout point de  $J$ , toute composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$ , et tout point de la grande orbite critique (d'après la proposition 4.1 de la section 4.3)

Pour la suite nous aurons besoin du lemme 2.7 de la partie III, que nous rappelons après les quelques définitions suivantes : appelons *orbite inverse* une suite  $(z_n)$  indexée par  $\mathbb{N}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = P^q(z_{n+1})$ . Nous noterons o.i.t.z. pour une orbite inverse tendant vers zéro :  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Nous noterons  $P_j$  le pétale répulsif d'index  $j$  (on a défini les pétales dans la partie III à la section 2). La fonction  $P^{-q}$  a une branche  $g$  définie sur un voisinage de 0 et telle que les  $P_j$  sont stables par

$g$ , et nous rappelons que  $\psi_{+,j}$  a été construite avec l'aide d'une certaine fonction  $\phi_{+,j} : P_j \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\phi_{+,j} \circ g = T_{-1} \circ \phi_{+,j}$ .

**Lemme 3.4** *Pour toute o.i.t.z.  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe un pétale répulsif  $P_j$  et  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $z_n \in P_j$ . De plus, il existe un unique  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \psi_{+,j}(w - n)$ . Il est défini par  $w = n + \phi_{+,j}(z_n)$  pour n'importe quel  $n \geq N$ .*

Les deux lemmes suivants montrent que l'on peut tirer l'homéomorphisme  $s$  en arrière par  $\psi_+$ .

**Lemme 3.5** *Il existe une unique fonction  $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui commute avec  $T_1$  et vérifie l'équation  $\psi_+ \circ r = s \circ \psi_+$ .* Def :  $r$

**Preuve** : Il existe un voisinage  $V_0$  de 0 tel que  $\forall z \in V_0$ ,  $z = g(P^q(z))$ . Donc  $\forall j$ ,  $\forall z \in V_0$ ,  $P^q(z) \in P_j \Rightarrow z \in P_j$ . Le bassin d'attraction de  $P_j$  pour  $g$  sur  $V_0$  est ouvert. D'après le lemme 3.4, toute o.i.t.z. finit par rester dans un même pétale  $P_j$ , unique car les pétales sont disjoints, et l'index  $j$  est appelé l'index de l'o.i.t.z. Inversement, pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , la suite  $z_n = \psi_{+,j}(w - n)$  est une o.i.t.z. d'index  $j$ .

**Lemme** : *Deux o.i.t.z.  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ont le même index si et seulement si il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  et une orbite inverse de compacts connexes  $C_n$  pour  $n \geq n_0$  ( $C_n = P^q(C_{n+1})$ ) tendant uniformément vers 0 (pour tout voisinage  $V$  de 0,  $C_n$  finit par être inclus dans  $V$ ), et contenant  $a_n$  et  $b_n$ .*

**Preuve** : Si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ont le même index  $j$ , alors soient  $w$  et  $w'$  donnés par le lemme 3.4 tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \psi_{+,j}(w - n)$  et  $b_n = \psi_{+,j}(w' - n)$ . Soit  $D$  le segment  $[w, w']$  et  $C_n = \psi_{+,j} \circ T_{-n}(D)$ . Alors la suite  $C_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) convient, comme on peut le vérifier en utilisant le développement de  $\psi_{+,j}$  (voir proposition 3.1). Réciproquement, si  $C_n$  ( $n \geq n_0$ ) existe,  $C_n$  finit par rentrer (pour  $n \geq n_1$ ) dans le domaine de définition et dans l'image de  $g$ , et donc  $C_{n+1} = g(C_n)$ . Tout point  $z \in C_{n_1}$  a son orbite par  $g$  qui finit par entrer dans un pétale  $P_j$ , et donc tout un voisinage de  $z$  également. Ainsi, les bassins d'attraction des différents  $P_j$  pour  $g$  sur  $C_{n_1}$  forment une partition par des ouverts. Comme  $C_{n_1}$  est connexe, il est en fait inclus dans l'un de ces bassin,  $P_j$ . Donc en particulier,  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ont le même index, c'est à dire  $j$ .  $\square$

**Lemme** : *Les applications  $s$  et  $s^{-1}$  préservent les o.i.t.z. et ne changent pas leurs index.*

**Preuve** : La première affirmation est évidente puisque  $s$  et  $s^{-1}$  commutent avec  $P$  et sont continues. Pour prouver la seconde, notons que le lemme précédent implique que deux o.i.t.z. de même index sont envoyées par  $s$  sur deux o.i.t.z. de même index. Il suffit donc de montrer que pour tout  $j$ , il existe une o.i.t.z. d'axe  $j$  dont l'image par  $s$  est d'axe  $j$ . Pour cela, nous utilisons le fait que  $s|_J$  est l'identité sur  $J$ . Prenons

alors l'o.i.t.z. suivante :  $z_n = \psi_{+,j}(w-n)$ , où  $w$  est n'importe quel point de  $\psi_{+,j}^{-1}(J)$ . Cette o.i.t.z. est fixe par  $s$  et d'index  $j$ .  $\square$

Soit maintenant  $j_0$  l'index du cylindre répulsif dans lequel nous travaillons. Pour  $w \in \mathbb{C}$ , soit  $z_n = \psi_{+,j_0}(w-n)$ . Soit la suite  $z'_n = s(z_n)$ . Par le lemme précédent, c'est une o.i.t.z. d'index  $j_0$ . Donc il existe un unique  $w' \in \mathbb{C}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $z'_n = \psi_{+,j_0}(w'-n)$ . Nous définissons alors  $r(w) = w'$ . Par définition,  $\psi_{+,j_0} \circ r = s \circ \psi_{+,j_0}$ . En utilisant l'unicité dans le lemme 3.4, on prouve aisément que  $r$  commute avec  $T_1$ . Notons que cette même unicité implique que  $w'$  est la seule valeur possible d'une fonction commutant avec  $T_1$  et vérifiant l'équation de l'énoncé.  $\blacksquare$

**Lemme 3.6** *La fonction  $r$  est un homéomorphisme.*

**Preuve :**

Prouvons d'abord que  $r$  est continue.

Preuve : Reprenons les notations de la preuve, en omettant l'indice  $j$  qui est fixé à  $j_0$ . Soit  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w' = r(w)$  et  $z'_n = \psi_+(w' - n)$ . Par le lemme 3.4,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $z'_n \in P_{j_0}$  et  $w' = n + \phi_+(z'_n)$ . Donc l'équation  $r = T_n \circ \phi_+ \circ s \circ \psi_+ \circ T_{-n}$  est vérifiée en  $w$  pour tout  $n \geq N$ . Cette composition est définie sur un voisinage de  $w$ . Prouvons qu'elle coïncide avec  $r$  pour un certain  $n \geq N$  sur tout un voisinage (plus petit) de  $w$ . Rappelons que nous avons choisi un voisinage  $V_0$  de 0 tel que  $\forall j$ ,  $\forall z \in V_0$ ,  $P^q(z) \in P_j \Rightarrow z \in P_j$ . Soit  $V_1$  un voisinage de 0 inclus dans  $V_0$  et envoyé dans  $V_0$  par  $s$ . D'après le développement de  $\psi_+$  (proposition 3.1), il existe  $N_2 \geq N$  et  $V_2$  un voisinage de  $w$ , tels que  $\forall n \geq N_2$ ,  $\psi_+(T_{-n}(V_2)) \subset V_1$ , et par conséquent  $s \circ \psi_+ \circ T_{-n}(V_2) \subset V_0$ . Soit  $V'_2 \subset V_2$  un voisinage de  $w$  tel que  $s \circ \psi_+ \circ T_{-N_2}(V'_2) \subset P_{j_0}$ . Alors d'après la définition de  $V_0$ , nous avons  $\forall n \geq N_2$ ,  $s \circ \psi_+ \circ T_{-n}(V'_2) \subset P_{j_0}$ . Donc par le lemme 3.4,  $r|_{V'_2} = T_{N_2} \circ \phi_+ \circ s \circ \psi_+ \circ T_{-N_2}|_{V'_2}$ . Donc  $r$  est continue.  $\square$

Maintenant, si nous effectuons la même construction pour  $s^{-1}$ , la fonction obtenue est un inverse continu pour  $r$ . Donc  $r$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .  $\blacksquare$

De l'équation  $\psi_+ \circ r = s \circ \psi_+$ , nous déduisons que  $r$  préserve l'orientation, est quasiconforme, et redresse  $\mu'$ . Puisque  $r$  commute avec  $T_1$ , nous en déduisons que  $\overline{r}$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ , à l'endroit (voir section 4.2).

$$\begin{array}{ccc} \mu' & \xrightarrow{\psi_+} & \mu'' \\ r \downarrow & & \downarrow s \\ 0 & \xrightarrow{\psi_+} & 0 \end{array}$$

Nous avons vu que  $s$  fixe tout point de la grande orbite du point critique  $c$  de  $P$ , et tout point de  $J$ , et qu'il préserve le complémentaire de  $K$  et toute composante de  $\overset{\circ}{K}$ . Donc

**Lemme 3.7** *L'homéomorphisme  $r$  fixe tout point de  $J\mathcal{F}$ , toute préimage par  $\psi_+$  d'un point de la grande orbite de  $c$ , donc en particulier les points critiques de  $h_\sigma$ , et laisse invariant l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus K\mathcal{F}$  ainsi que toute composante connexe de  $K\mathcal{F}$ .*

**Preuve :** Nous reprenons les notations du lemme 3.5 et de sa preuve, dans laquelle nous avons donné une construction de  $r$ . Pour tout point  $w \in \mathbb{C}$  tel que le point  $z = \psi_+(w)$  est dans la grande orbite critique (resp. dans  $J\mathcal{F}$ ), tout point de la suite  $z_n = \psi_+(w - n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , a la même propriété. Donc  $s(z_n) = z_n$ . Donc  $\psi_+(w - n) = s(z_n)$ . Donc  $r(w) = w$ , d'après la construction de  $r$ .

La fonction  $r$  fixe tout point de  $J\mathcal{F}$ , donc  $r(J\mathcal{F}) = J\mathcal{F}$ , donc  $r^{-1}(J\mathcal{F}) = J\mathcal{F}$  puisque  $r$  est bijective, donc  $r$  envoie toute composante connexe  $U$  de  $\mathbb{C} \setminus J\mathcal{F}$  sur une composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus J\mathcal{F}$ . Si  $U = \mathbb{C} \setminus K\mathcal{F}$ , alors comme  $\mathbb{C} \setminus K\mathcal{F} = \psi_+^{-1}(\mathbb{C} \setminus K)$ , et  $\mathbb{C} \setminus K$  est invariant par  $s$ , c'est que  $U$  est fixé par  $r$ . Si  $U$  est une composante de  $K\mathcal{F}$ , alors son image par  $\psi_+$  est une composante connexe de  $\overset{\circ}{K}$  (lemme 4.7 dans la partie III). Donc  $U$  contient un point  $w$  envoyé par  $\psi_+$  sur la grande orbite critique, donc  $r(w) = w$ , donc  $r(U) = U$ . ■

**Lemme 3.8** *Il existe un homéomorphisme  $r'' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  qui commute avec  $T_1$  et tel que  $h_\sigma \circ r = r'' \circ h_\sigma$ .*

Def :  $r''$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{h_\sigma} & \mathbb{C} \\ r \downarrow & & \downarrow r'' \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{h_\sigma} & \mathbb{C} \end{array}$$

**Preuve :** Soient  $j_0$  l'index du cylindre dans lequel nous travaillons, et  $i_0 = j_0 - \nu/2$ . L'existence d'une fonction  $r'' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $h_{\sigma, j_0} \circ r = r'' \circ h_{\sigma, j_0}$  équivaut à ce que  $r$  envoie chaque fibre de  $h_{\sigma, j_0}$  dans une fibre. L'unicité de  $r''$  provient alors de ce que  $h$  est surjective. Vérifions l'existence : comme  $h_{\sigma, j_0} = \phi_{\pm, j_0} \circ \psi_{+, j_0}$ , cela équivaut à ce que  $s$  envoie chaque fibre de  $\phi_{\pm, j_0}$  dans une fibre (rappelons que  $\psi_{+, j_0}$  est surjective). Soient donc  $z_0$  et  $z_1$  deux points de  $\overset{\circ}{K}$  qui ont même image par  $\phi_{\pm, j_0}$ . Soit  $z'_0$  (resp.  $z'_1$ ) le premier itéré de  $z_0$  (resp.  $z_1$ ) par  $P$  qui tombe dans  $K^{i_0}$ . On a alors  $\phi_{-, i_0}(z'_0) = \phi_{-, i_0}(z'_1)$ . Cette équation équivaut à ce qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P^{nq}(z'_0) = P^{nq}(z'_1)$  (lemme 2.6 de la partie III). Donc  $s \circ P^{nq}(z'_0) = s \circ P^{nq}(z'_1)$ , donc  $P^{nq} \circ s(z'_0) = P^{nq} \circ s(z'_1)$ . Ceci, et le fait que les  $K^i$  sont invariants par  $s$  et donc que  $s(z'_k)$  est le premier itéré de  $s(z_k)$  qui tombe dans  $K^{i_0}$ , implique que  $\phi_{\pm, j_0}(s(z_0)) = \phi_{\pm, j_0}(s(z_1))$ .

La continuité de  $r''$  se déduit du diagramme par le critère suivant : l'image réciproque d'un ouvert est ouverte. En effet, la flèche du haut est ouverte surjective et les deux autres sont continues.

La même construction peut être effectuée pour  $r^{-1}$  au lieu de  $r$  (les propriétés de  $s$  utilisées sont également vraies pour  $s^{-1}$ ), et fournit alors un inverse continu de  $\mathbb{C}$

dans  $\mathbb{C}$  pour  $r''$ .

Les fonctions  $h_\sigma$  et  $r$  commutent avec  $T_1$  donc  $r''$  aussi.  $\blacksquare$

L'homéomorphisme  $r''$  est quasiconforme, mais ce fait ne joue pas de rôle dans la suite.

L'homéomorphisme  $\bar{r}$  redresse  $\bar{\mu}'$ , donc il conjugue  $\bar{H}$  en une application holomorphe que nous noterons  $\bar{l}$

Def :  $l$

$$l = r \circ H \circ r^{-1}$$

Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{l} & 0 \\ \uparrow r & & \uparrow r \\ \mu' & \xrightarrow{H} & \mu' \end{array}$$

Def :  $u$

Notons que  $l$  est le conjugué de  $\tilde{\beta}$  par le redressement  $u = r \circ \tilde{\zeta}$  de  $\mu$ .

**Proposition 3.9** *Il existe  $\rho \in \mathbb{C}$  tel que*

$$l = h_\rho$$

**Preuve :** Nous avons  $l = r \circ H \circ r^{-1} = r \circ \tilde{\zeta} \circ h_\sigma \circ r^{-1} = r \circ \tilde{\zeta} \circ r''^{-1} \circ h_\sigma$ , donc

$$l = t \circ h_\sigma$$

Def :  $t$

où  $t = r \circ \tilde{\zeta} \circ r''^{-1}$ . La fonction  $t$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{C}$  qui commute avec  $T_1$ . Puisque  $h_\sigma$  est surjective, et  $h_\sigma$  et  $l$  sont holomorphes, il est aisé de prouver que  $t$  est holomorphe à chaque point qui n'est pas une valeur critique de  $h_\sigma$ . Les valeurs critiques sont isolées et la fonction  $t$  est continue, donc  $t$  est holomorphe en ces points. Un homéomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui est holomorphe et commute avec  $T_1$  est forcément une translation :  $t = T_\tau$  pour un certain  $\tau \in \mathbb{C}$ . Donc  $l = h_{\sigma+\tau}$ .  $\blacksquare$

L'homéomorphisme  $u$  commute avec  $T_1$  et conjugue  $\beta$  à  $l$ . Il préserve l'orientation et est  $K$ -quasiconforme (il redresse  $\mu$ ). Nous avons vu que c'est également le cas pour  $r$ . Donc d'après la section 4.2, les homéomorphismes  $\bar{u}$  et  $\bar{r}$  sont à l'endroit (ils préservent les bouts). Soit l'application  $\bar{\eta} \circ \bar{u}^{-1}$ . C'est un homéomorphisme de  $B = \bar{r}(\bar{E}^+)$  vers  $C = \bar{\mathbb{H}}$ . Il conjugue  $\bar{l}|_B$  à  $\bar{T}_\omega|_C$ . De plus, il est analytique :  $u^{-1}$  envoie la forme nulle sur  $\mu$ , et  $\tilde{\eta}$  envoie  $\mu$  sur 0 (par définition de  $\mu$ ). L'ensemble  $C$  est un voisinage de  $+\mathbf{i}\infty$ , et  $B$  aussi car  $\bar{r}$  est à l'endroit. Donc  $\hat{l}'(+\mathbf{i}\infty) = \hat{T}'_\omega(+\mathbf{i}\infty) = e^{i2\pi\omega}$  où le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  désigne le prolongement fixant les bouts du cylindre de l'application quotient  $\bar{\phantom{x}}$ . Donc l'application  $\bar{l}$  est l'unique application de cornes  $\bar{h}_\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , ayant  $e^{i2\pi\omega}$  pour dérivée en  $+\mathbf{i}\infty$  (notons que  $\hat{T}'_\omega(-\mathbf{i}\infty) = e^{-i2\pi\omega}$ , donc dans le cas où on a choisi l'autre bout du cylindre, la construction fonctionne de même et donne l'unique application de cornes ayant  $e^{-i2\pi\omega}$  pour dérivée en  $-\mathbf{i}\infty$ ). Nous avons démontré le théorème 1.



## 3.2 Compléments

Nous démontrons dans cette section les corollaires 1.1, 1.2, 1.3, et 1.4 du théorème 1.

Nous affirmons que l'image de  $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{R}}$  par  $\overline{u}$  est le bord du disque de Siegel  $\overline{\Delta}'$  de  $\overline{l}$ . Le disque de Siegel se trouve être l'ouvert maximum contenant  $+i\infty$  de conjugaison topologique à une rotation sur un disque (ce que l'on appelle un domaine de rotation). Donc il suffit de démontrer que  $\mathbb{T}$  est l'ouvert de rotation maximum pour la fonction  $\overline{\beta}$  au point  $+i\infty$ . Or d'une part  $\overline{\mathbb{H}}$  est effectivement un domaine de rotation de  $\overline{\beta}$ . D'autre part d'autre part, soit  $c$  l'unique point critique dans  $\mathbb{T}$  de  $\overline{\beta}$ . Alors  $c$  ne peut appartenir à un domaine de rotation, ni aucune de ses préimages itérées, en particulier aucune de ses préimages itérées dans  $\mathbb{T}$ . Sur  $\mathbb{T}$ ,  $\overline{\beta}$  est conjuguée à une rotation irrationnelle : donc les préimages itérées de  $c$  appartenant à  $\mathbb{T}$  sont denses dans  $\mathbb{T}$ . Donc  $\overline{\mathbb{H}}$  est le domaine de rotation maximum de  $\overline{\beta}$  en  $+i\infty$ .

$$\overline{u}(\mathbb{T}) = \partial\overline{\Delta}'$$

De plus, l'image de  $\mathbb{T}$  par  $\overline{\zeta}$  est le bord de la case d'échiquier supérieure  $\overline{E}^+$ , donc passe par le point critique principal. Nous avons vu que les points critiques sont fixes par  $r$ , donc la courbe  $\overline{u}(\mathbb{T}) = \overline{r}(\partial\overline{E}^+)$  passe par le point critique principal. Nous avons prouvé le corollaire 1.1.

Le corollaire 1.2 est immédiat, avec pour  $m$  la constante introduite dans la preuve de la proposition 2.6 : l'anneau analogue pour  $\overline{\beta}$  a un module universel égal à  $m$ , et  $\overline{u}$  réalise une conjugaison  $K$ -quasiconforme avec l'application de cornes  $\overline{l}$ .

Prouvons maintenant le corollaire 1.3 (toujours dans le cas  $b = 1$ , le cas  $b = -1$  étant analogue). Soit  $\xi^-$  la fonction donnée par la proposition d'universalité 2.5, et  $U = \zeta^{-1}(D^-)$  (rappelons que  $D^-$  est la composante connexe de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$  contenant un demi-plan inférieur). La fonction  $\xi^-$  est une représentation conforme de la composante  $D^-$  de  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$  sur  $-\mathbb{H}$ .

$$\beta|_U = h_{PB} \circ \xi^- \circ \zeta$$

Fixons n'importe quelle case  $C$  de l'échiquier parabolique de  $h_{PB}$ , indépendamment de  $p/q$ , qui soit incluse dans  $-\mathbb{H}$  et s'envoie sur  $\mathbb{H}$  par  $h_{PB}$ . Une telle case existe : en effet  $h_{PB} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est un r.d.r. Alors il existe une constante universelle  $\varepsilon$  (indépendante de  $p/q$  et de  $K$ , et ne dépendant que de  $C$  que l'on a fixé) telle que l'image  $C' \stackrel{\text{def}}{=} (\xi^- \circ \zeta)^{-1}(C)$  contienne une boule de rayon  $\varepsilon$ , puisque  $(\xi^- \circ \zeta)^{-1}$  est dans la classe des fonctions univalentes de  $-\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{C}$  et commutant avec  $T_1$ . Puisque  $\overline{u}$  est dans la classe des isomorphismes  $K$ -quasiconformes du cylindre dans lui-même, il existe  $\varepsilon'(K) > 0$  (dépendant de  $C$  et  $K$ , mais pas de  $p/q$ ) tel que l'image  $\overline{C}''$  de  $\overline{C}'$  par  $\overline{u}$  contient un disque de rayon  $\varepsilon'$ . D'autre part  $h_{PB}(C) \subset \mathbb{H}$  donc  $h(C'') \subset \Delta'$ . Cela démontre le corollaire 1.3.

Pour le corollaire 1.4, la forme  $\mu''$  et son redressement  $s$  ont déjà été introduits dans la section précédente, où nous avons vu que  $s$  fixe les points de  $J(P)$ , les composantes

de son complémentaire et les points de la grande orbite critique. L'unicité de  $s$  est immédiate, puisqu'il redresse une forme donnée et fixe au moins deux points de  $\mathbb{C}$  (une infinité en fait). Posons  $\Delta_i = \psi_{+,j}(\Delta'_j)$  où  $j = i + b/2$ . Le fait que  $\psi_{+,j}$  est injective sur l'adhérence de  $\Delta'_j$  provient de ce que  $\psi_+$  est injective sur l'adhérence de  $E^+$ , et de la relation  $\psi_+ \circ r = s \circ \psi_+$ . La fonction  $r$  n'a certes été définie que dans le cas  $j = j_0$ , mais tout résultat concernant  $j_0$  se transporte par le diagramme 1.1 en un résultat concernant  $j$ . Le développement de la proposition 3.1 implique que  $\Delta_i$  adhère au point fixe 0 de  $P$ . Il est inclus dans une composante de  $\overset{\circ}{K}$  puisque  $\Delta'_j$  ne rencontre pas  $J\mathcal{F}$ . Le même développement implique que  $\Delta_i$  rencontre le pétale  $P_i$ , donc est inclus dans la même composante que le pétale, donc en particulier est inclus dans  $K^i$ . Le bord  $L'$  de  $\Delta'$  est image du bord de  $E^+$  par l'homéomorphisme  $r$ , donc est une courbe injective. Le développement implique que la partie de cette courbe de partie réelle tendant vers  $-\infty$  a son image par  $\psi_+$  qui tend vers 0. C'est également vrai pour l'autre partie, car elle possède un domaine fondamental pour son quotient par  $T_1$  compactement inclus dans  $\overset{\circ}{K}\mathcal{F}$  (en effet le lemme 3.8 de la partie III dit que  $\overline{E^+} \subset \overset{\circ}{K}\mathcal{F}$ ), donc d'image par  $\psi_+$  tendant uniformément vers 0 sous l'itération de  $P^q$ . Comme  $L'$  ne rencontre pas  $J\mathcal{F}$ , son image par  $\psi_+$  est de la forme  $C \setminus \{0\}$  où  $C$  est une courbe de Jordan contenant 0. Comme  $\psi_+$  est un r.r.2 au dessus de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , et comme  $\Delta'$  est une composante de  $\text{Def}(\psi_+) \setminus L'$ , on en déduit que  $\psi_+(\Delta')$  est toute une composante de  $\mathbb{C} \setminus C$ . Comme elle est incluse dans l'ensemble borné  $K^i$ , il s'agit de la composante bornée. Le reste est conséquence des divers diagrammes commutatifs. Cela démontre le corollaire 1.4.

## 4. Appendices

### 4.1 Construction géométrique de la fraction de Blaschke $B$

Nous donnons ici la construction géométrique de la fraction de Blaschke  $B$  qui nous a inspiré la construction analogue de  $\beta$  pour les applications de cornes. La fraction  $B$  est habituellement introduite par sa formule explicite,  $B(z) = z^2 \frac{z-3}{1-3z}$ , dont on déduit ses propriétés géométriques. Pour l'analogie  $\beta$  de  $B$ , nous ne disposons pas d'une telle formule.

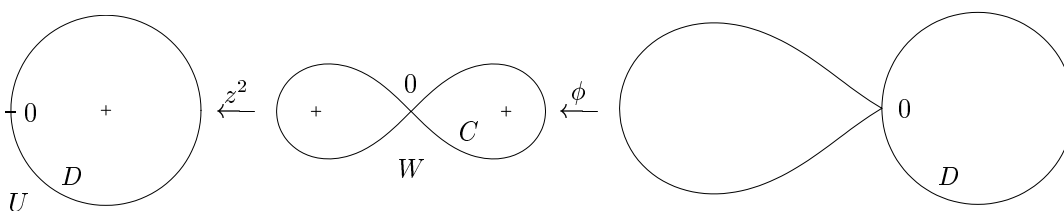


FIG. 4.1 – construction de  $b$

Soit  $U = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$  où  $D$  est le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. Soit

$$f(z) = z^2$$

La préimage par  $f$  du cercle bordant  $D$  est une lemniscate, une courbe ressemblant au symbole  $\infty$ . Elle divise le plan complexe en trois ouverts. L'un d'eux est non borné et  $f$  y est un revêtement de degré 2 au dessus de  $U$ . Il y a deux branches continues de  $f^{-1}$  sur  $\overline{D}$ , et ce sont des homéomorphismes sur leurs images : l'une applique  $\overline{D}$  sur un fermé  $C$  contenant 1, l'autre sur  $-C$ . Soit  $W = \mathbb{C} \setminus C$ . Son bord est localement connexe. Soit  $\phi$  l'isomorphisme conforme de  $U$  vers  $W$  dont le prolongement aux bords envoie 0 sur 0. Soit

$$g(z) = f \circ \phi$$

Nous faisons maintenant le changement de variables  $z \mapsto t(z) = 1 - z$  : soit

$$b(z) = t \circ g \circ t^{-1}$$

de sorte que  $b$  est définie sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ . La fonction  $b$  se prolonge holomorphiquement en  $\infty$ , le fixant avec degré local 2. La fonction  $b$  vérifie  $b(z) \rightarrow \partial\mathbb{D}$  quand  $z \rightarrow \partial\mathbb{D}$ ,

donc par une réflexion de Schwarz,  $b$  se prolonge en une fonction analytique de  $\mathbb{S}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$ . Ce prolongement, noté  $B$ , est donc une fraction rationnelle. Nous allons prouver que c'est  $z^2 \frac{z-3}{1-3z}$ .

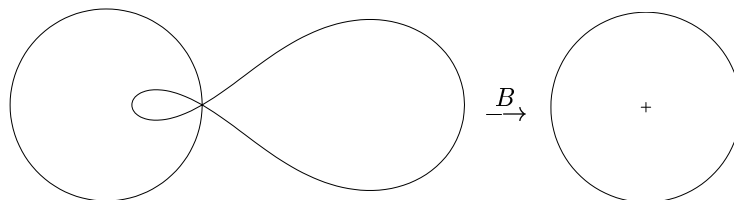


FIG. 4.2 – le cercle unité, et ses préimages par  $B$

Restreint au cercle unité,  $B$  est un isomorphisme analytique sauf en 1, où il a un point critique de degré local 3, comme on peut le vérifier avec le nombre d'enroulements. Puisque 1 est son unique préimage,  $B$  est de degré 3. Elle fixe  $\infty$  avec degré local 2 et le point 0 a deux préimages : 0 avec multiplicité 2 et un autre point  $w$ , de module  $> 1$ , avec multiplicité 1. Soit  $\Phi(z) = \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ , et  $F(z) = B(z)/(z^2\Phi(z))$ . Le point 0 n'a alors pas de préimage par la fraction rationnelle  $F$ . Donc  $F$  est constante. Comme  $F(1) = 1$ , on en déduit que  $B(z) = z^2\Phi(z)$ . Déterminons  $w$ . Notons d'abord que  $B$  commute avec la symétrie  $z \mapsto \bar{z}$ . Donc  $w \in \mathbb{R}$ . On calcule ensuite  $B'(1) = 2 + \frac{1-w^2}{(1-w)^2}$ . Or on sait que  $B'(1) = 0$  : donc  $2(1-w)^2 + 1 - w^2 = 0$ ,

$$(w-3)(w-1) = 0$$

Or  $w \neq 1$ , donc  $w = 3$ . Nous avons démontré que

$$B(z) = z^2 \frac{z-3}{1-3z}$$

## 4.2 Lemmes de relèvement d'homéomorphismes

Les affirmations suivantes sont données sans preuve. Elles proviennent de la topologie algébrique élémentaire.

Si  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $\mathbb{C}$ , simplement connexes et  $T_1$ -invariants, alors  $\overline{U}$  et  $\overline{V}$  sont des anneaux. Si  $f_C$  est un homéomorphisme de  $\overline{U}$  vers  $\overline{V}$ , alors il existe un homéomorphisme  $f$  de  $U$  dans  $V$ , qui relève  $f_C$ , (i.e.  $\pi \circ f = f_C \circ \pi$ ) et on a

$$f \circ T_1 = T_n \circ f$$

avec  $n = 1$  ou  $n = -1$ . L'application  $f$  est unique à post-composition près avec une translation  $T_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , et  $f_C = \overline{f}$ .

Sous les mêmes hypothèses, les groupes fondamentaux  $\pi_1(\overline{U})$  et  $\pi_1(\overline{V})$  sont naturellement isomorphes à celui de  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  : l'inclusion induit un homomorphisme des  $\pi_1$ ,

qui est en fait un isomorphisme. Ainsi nous pouvons les identifier à  $\mathbb{Z}$ . L'application  $\overline{f}$  induit un isomorphisme  $(\overline{f})_* : \pi_1(\overline{U}) \rightarrow \pi_1(\overline{V})$ , et donc une application  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  et cette application est la multiplication par  $n$ .

Supposons que  $\overline{U}$  et  $\overline{V}$  soient des voisinages du bout supérieur  $+\mathbf{i}\infty$  du cylindre (i.e.  $U$  et  $V$  contiennent un demi-plan supérieur) *mais pas* du bout inférieur, et que  $\overline{f}$  est holomorphe. Alors  $f$  est holomorphe, et  $\overline{f}$  admet un prolongement holomorphe fixant  $+\mathbf{i}\infty$ , ce qui implique que  $n = 1$ .

Supposons maintenant que  $U = \mathbb{C}$  et  $V = \mathbb{C}$ , c'est à dire que  $\overline{f}$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ . Rappelons que la surface de Riemann  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  peut être identifiée au sous-ensemble  $\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty\}$  de  $\mathbb{S}^2$ , par l'application  $w \mapsto z = e^{i2\pi w}$ . Un homéomorphisme  $\overline{f}$  de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$  s'étend en un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^2$ . Il y a donc deux sortes d'homéomorphisme du cylindre : ceux qui fixent chaque bout et ceux qui les échantent. Les premiers seront dits *à l'endroit* et les seconds *à l'envers*.

Réciproquement, si  $f$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{C}$  tel que

$$f \circ T_1 = T_k \circ f$$

où  $k = 1$  ou  $k = -1$ , alors  $\overline{f}$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$ . Posons  $l = 1$  s'il est à l'endroit et  $l = -1$  s'il est à l'envers. Soit  $m = 1$  si  $f$  préserve l'orientation, et  $m = -1$  sinon. Alors

$$k \cdot l \cdot m = 1$$

Un homéomorphisme  $\eta_{\mathcal{L}}$  de  $\mathbb{T}$  se relève en un homéomorphisme  $\eta$  de  $\mathbb{R}$ , unique à post-composition près avec une translation  $T_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , et  $\eta_{\mathcal{L}} = \overline{\eta}$ . Nous avons

$$\eta \circ T_1 = T_n \circ \eta$$

avec  $n = 1$  ou  $n = -1$ . La fonction  $\overline{\eta}$  préserve l'orientation de  $\mathbb{T}$  si et seulement si  $\eta$  est croissante, si et seulement si  $n = 1$ . Si  $\widetilde{\eta}$  est un prolongement continu de  $\overline{\eta}$  à  $\overline{\mathbb{H}}/\mathbb{Z}$ , alors il existe un unique relèvement  $\tilde{\eta}$  de  $\widetilde{\eta}$  qui prolonge  $\eta$ . De plus

$$\tilde{\eta} \circ T_1 = T_n \circ \tilde{\eta}$$

avec la même valeur de  $n$ . Si  $\widetilde{\tilde{\eta}}$  est un homéomorphisme sur son image, alors il en est de même pour  $\tilde{\eta}$ .

### 4.3 Rigidité

Nous utiliserons la proposition suivante :

**1.** Si deux germes holomorphes fixant 0 sont quasiconformément conjugués, et si l'un a un multiplicateur neutre en 0, alors l'autre a même multiplicateur.

Il en existe une preuve utilisant le théorème de redressement des champs d'ellipses à paramètre analytique, mais nous ne disposons pas de référence pour celle-ci. Par contre, Naïshul' a généralisé cette proposition aux conjugaisons topologiques de germes holomorphes ou préservant l'aire, voir [N]; Pérez-Marco propose une preuve alternative pour les conjugaisons topologiques des germes holomorphes dans [PM2], théorème IV.1.1.

Ceci a la conséquence suivante :

**2.** Soit  $P = \rho z + z^2$ , avec  $\rho = e^{i2\pi p/q}$ . Alors tout polynôme quasiconformément conjugué à  $P$  est  $\mathbb{C}$ -affinement conjugué à  $P$ . En effet,  $P$  est l'unique polynôme quadratique monique et fixant 0 avec multiplicateur  $\rho$ .

**Lemme 4.1** *Soit  $s$  un homéomorphisme quasiconforme de  $\mathbb{C}$  qui conjugue  $P$  à lui-même. Alors  $s$  fixe tout point de la grande orbite du point critique  $c$  de  $P$ , ainsi que tout point de  $J$ , et préserve chaque composante connexe de  $\mathbb{C} \setminus J$ .*

**Preuve :** L'ouvert  $\mathbb{C} \setminus K$  est le bassin d'attraction de  $\infty$ , donc il est préservé (invariant par  $s$ ).

Notons que  $s$  doit fixer 0 d'après le point 1, puisque 0 est l'unique point fixe neutre de  $P$ . Il doit donc fixer son unique autre préimage,  $-\rho$ . Enfin, en tant qu'homéomorphisme quasiconforme de  $\mathbb{C}$ , il se prolonge à l'infini en un homéomorphisme quasiconforme de  $\mathbb{S}^2$ , avec  $s(\infty) = \infty$ .

Soit  $\mu$  le pull-back par  $s$  de la forme de Beltrami nulle définie sur  $\mathbb{C}$ . On considère  $\mu$  comme une forme de Beltrami sur  $\mathbb{S}^2$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , soit  $s_t$  l'unique redressement sur  $\mathbb{S}^2$  de la forme de Beltrami  $t.\mu$  qui fixe les trois points 0,  $-\rho$ ,  $\infty$ . Alors  $s_0 = \text{Id}$  et  $s_1 = s$ . D'après le théorème de redressement des familles de formes de Beltrami, (voir [A2]),  $s_t$  varie continûment en tant qu'homéomorphisme de la sphère de Riemann. D'autre part,  $\mu$  est invariante par  $P$ , donc  $t.\mu$  l'est également, donc la fonction  $s_t \circ P \circ s_t^{-1} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  est analytique. C'est donc une fraction rationnelle. Comme  $\infty$  est sa seule préimage, c'est un polynôme. Comme il est de degré 2, fixe 0, avec multiplicateur  $\rho$  (d'après le point 1) et envoie le point  $-\rho$  sur 0, c'est forcément  $P$ . Donc  $s_t \circ P = P \circ s_t$ . L'unique point critique de  $P$  doit être fixé par  $s_t$ , car c'est le seul point de  $\mathbb{C}$  avec une seule préimage. Donc tout point  $w$  dans son orbite directe est également fixé. Soit maintenant  $z$  un préimage  $n$ -ième de  $w$ . La fonction  $t \mapsto s_t(z)$  est continue, et est à valeur dans l'ensemble discret des préimages  $n$ -ièmes de  $w$ . Donc elle est constante. Puisque  $s_0 = \text{Id}$ , cette constante est  $z$ . Comme  $s_1 = s$ , on en déduit que  $s(z) = z$ .

La méthode précédente s'applique également aux préimages  $n$ -ièmes de 0, qui par convention est fixé par  $s_t$ . Par continuité,  $s$  fixe tout point de l'adhérence de l'ensemble de ces préimages, et cette adhérence est  $J(P)$  (voir [CG] pour une preuve de ce dernier fait).

La fonction  $s$  induit un homéomorphisme de  $\overset{\circ}{K}$  dans lui-même. En particulier l'image d'une composante connexe  $U$  de  $K$  est une composante connexe. Pour prouver que c'est en fait la même, soit  $z$  un point de  $U$  :  $s_t(z)$  varie continûment et reste dans  $\overset{\circ}{K}$ , donc dans la même composante. Donc  $s_1(z) = s(z)$  et  $s_0(z) = z$  sont dans la même composante de  $\overset{\circ}{K}$ . ■





## Cinquième partie

### Un pas vers la mesure positive



## Introduction

Une conjecture affirme l'existence d'ensembles de Julia de mesure positive. Dans cet article, je démontre qu'elle est conséquence d'un ensemble de deux autres conjectures. Alors que la positivité de l'aire est difficile à tester avec des expériences numériques, non seulement les expériences numériques semblent soutenir ces deux conjectures, mais celles-ci sont hautement plausibles et on a même des pistes pour les attaquer. Les ensembles de Julia concernés dans cet article sont ceux des polynômes  $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$  de degré 2 ayant un point périodique 0 de période 1 et de multiplicateur indifférent de nombre de rotation  $\theta$ ; cela correspond à prendre un paramètre  $c$  sur le bord de la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot. Pour nos candidats à la mesure positive, 0 sera un point de Crémer.

L'idée de base de Douady est non pas d'étudier les ensembles de Julia ayant un point de Crémer, mais d'étudier les perturbations des polynômes ayant un disque de Siegel et ceux ayant un point parabolique. Cela correspond aux deux conjectures de Douady citées dans l'introduction de la présente thèse. Pour être plus précis nous perturbons le nombre de rotation  $\theta$ , qui reste réel. En approchant alternativement un Siegel par un parabolique (associé aux réduites) puis un parabolique par un Siegel (de type constant), on obtient par des arguments de semi-continuité un nombre de rotation  $\theta$  et le polynôme  $P$  associé, dont l'ensemble de Julia rempli  $K(P)$  a mesure positive. En prenant soin à ce que les perturbations soient suffisamment petites, de sorte que le nombre de rotation  $\theta$  soit très bien approché par des rationnels, le point fixe neutre de  $P$  est un point de Crémer. Cela implique que  $J(P) = K(P)$ , donc l'ensemble de Julia  $J(P)$  est de mesure positive.

En partant d'un nombre  $\theta$  tel que  $P_\theta$  a un disque de Siegel, et en l'approchant par ses réduites  $p_n/q_n$ , nous remplaçons le disque de Siegel par une fleur parabolique, dont les interpétales (fjords) sont de plus en plus fins. Par conséquent la mesure du complémentaire de  $\overset{\circ}{K}(P_{p_n/q_n})$  dans  $\overset{\circ}{K}(P_\theta)$  tend vers 0.

Les choses ne se passent pas aussi bien quand on part de  $\theta = p/q$  rationnel et qu'on le perturbe par des nombres de type constant  $\theta_n$ . En particulier, il n'est plus vrai que la mesure du complémentaire de  $\overset{\circ}{K}(P_{\theta_n})$  dans  $\overset{\circ}{K}(P_\theta)$  tend vers 0. Il faut soigneusement choisir ses perturbations. Nous écrivons  $p/q = [a_0, \dots, a_m]$  et posons  $\theta_n = [a_0, \dots, a_m, n, 1, 1, \dots]$ . Cela correspond à un multiplicateur virtuel égal au nombre d'or ou à son opposé dans les cylindres d'Écalle perturbés. Soit  $\alpha(p/q)$  la proportion de mesure perdue dans ce processus. Dans la suite de perturbations

alternées Siegel  $\longleftrightarrow$  parabolique, nous devons nous arranger pour que les  $\alpha$  des paraboliques soient de plus en plus proches de 0. L'observation de Douady était que  $\alpha(p/q)$  semble plus petit pour les plus grandes valeurs de  $q$ . Il faut cependant des conditions supplémentaires. Nous proposons de prendre pour  $p/q$  une réduite  $p_k/q_k$  d'ordre élevé d'un nombre de type constant. Nous pensons alors que  $\alpha(p_k/q_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . L'idée est de relier  $\alpha$  à la mesure dans le cylindre d'Écalle du complémentaire de la préimage de  $K(P_{p/q})$  par les coordonnées de Fatou répulsives. Des observations numériques et des analogies nous poussent à penser que cette dernière reste bornée et tend vers 0 pour les réduites. Nous formulons donc deux conjectures rendant compte de ces observations, et prouvons qu'elles impliquent l'existence de nombres  $\theta$  tels que  $\text{Leb } J(P_\theta) > 0$ .

Notons que les nombres de rotations ainsi obtenus sont probablement de la forme suivante :  $[a_0, a_1, \dots]$  où la suite  $a_n$  est quelconque au début, puis possède une longue suite de 1, puis un grand entier, suivi à nouveau d'une très longue suite de 1, puis un très grand entier, et ainsi de suite. Nous ne savons pas préciser les mots "longue suite" et "grand entier", mais il y a peu de chances que l'ensemble de ces nombres soit générique au sens de Baire.

# 1. Notations, conjectures, théorème

Nous reprenons dans cette partie les notations de la partie III, dont voici un résumé

- $\forall p \wedge q = 1$ ,  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  indexe les axes et pétales attractifs du point parabolique 0 de  $P$ ; on utilise le symbole  $i$  pour de tels indices
- $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  indexe les axes et pétales répulsifs; on utilise le symbole  $j$
- $\phi_{-,i}$  désigne la coordonnée de Fatou étendue associée à l'index attractif  $i$
- $\psi_{+,j}$  désigne la paramétrisation de Fatou étendue associée à l'index répulsif  $j$
- $\phi_{+,j}$  désigne la coordonnée de Fatou *non* étendue, associée à l'index répulsif  $j$
- $h_{\sigma,j}$  est l'application de cornes associée à l'index répulsif  $j$ ; il dépend du choix d'une phase  $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}}$
- $\overline{h}_{\sigma,j}$  est l'application quotient (définie sur un sous-ensemble du cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , et à valeur dans  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ), et  $\widehat{h}_{\sigma,j}$  est son prolongement aux deux bouts du cylindre
- $K\mathcal{F}_j$  est la préimage de  $K$  par  $\psi_{+,j}$ ;  $J\mathcal{F}_j$  est la préimage de  $J$
- $J_L\mathcal{F}_j$  est l'ensemble de Julia-Lavaurs et  $K_L\mathcal{F}_j$  est l'ensemble de Julia-Lavaurs rempli, associés à  $h_{\sigma,j}$
- certains des objets de l'implosion parabolique dépendent du sens  $\nu \in \{-1, 1\}$  dans lequel on fait l'implosion
- nous utilisons le symbole  $b \in \{-1, 1\}$  pour désigner l'un des bouts  $b\mathbf{i}\infty$  du cylindre  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ ; il ne faut pas le confondre avec  $\nu$ , même si nous poserons  $b = \nu$  à certains endroits de cette partie

Nous introduisons les notations suivantes :

- pour  $a_i \geq 1$ ,  $[a_0, a_1, \dots]$  désigne le nombre  $\theta$  ayant la suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  pour développement en fraction continue
- on dit que le nombre  $\theta$  est de type borné par  $M \in \mathbb{N}^*$ , si  $\forall i \geq 1, a_i \leq M$ .
- $\mathbb{W} = \{[a_0, \dots, a_n, 1, 1, \dots] \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{N}\}$  est l'ensemble des nombres irrationnels dont le développement en fraction continue stationne en 1
- $o_r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, \dots]$  désigne le nombre d'or
- si  $\theta$  est un nombre irrationnel, nous noterons fréquemment  $p_n/q_n$  ses réduites en fraction continue
- l'invariant formel d'une application analytique  $f$  fixant 0 et de la forme  $f(z) = z + Cz^{q+1} + O(z^{q+2})$  avec  $C \neq 0$ , est l'unique  $A \in \mathbb{C}$  tel que  $f$  est analytiquement conjuguée au voisinage de 0 à une application de la forme  $z \mapsto z + z^{q+1} + Az^{2q+1} + O(z^{2q+2})$
- par définition,  $P_\theta(z) = \rho z + z^2$  où  $\rho = \exp(\mathbf{i}2\pi\theta)$  et  $\theta \in \mathbb{R}$

- il arrivera que  $\theta = p/q$  où  $p/q$  est une fraction irréductible
- dans ce cas,  $P_{p/q}^q(z) = z + Cz^{q+1} + O(z^{q+2})$  avec  $C \neq 0$
- l'invariant formel de  $P_{p/q}^q$  est noté  $A\left(\frac{p}{q}\right)$
- par définition,

$$\gamma\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\frac{q+1}{2} - A\left(\frac{p}{q}\right)}{q}$$

- $\Delta(\theta)$  est l'éventuel disque de Siegel de  $P_\theta$  en 0, et  $\emptyset$  sinon :  $\Delta(\theta)$  est un ouvert
- étant donné  $\theta$  réel irrationnel, on note  $p_n/q_n$  ses réduites
- $\mathcal{S}$  est l'ensemble des  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $\Delta_\theta \neq \emptyset$
- $\mathcal{B}$  est l'ensemble des  $\theta$  irrationnels et tels que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$
- rappelons qu'un théorème de Yoccoz dit que  $\mathcal{B} = \mathcal{S}$
- pour les objets qui dépendent de  $\theta$ , ce nombre apparaîtra parfois en indice, parfois en argument, et sera parfois sous-entendu, en fonction de la lisibilité de la notation

Voir [DH] ou [CG] pour la définition et quelques propriétés élémentaires des ensembles de Julia et Mandelbrot.

**Proposition 1.1**

$$\forall p \wedge q = 1, \operatorname{Re}(\gamma) > \frac{1}{4}$$

On trouvera une preuve dans [BE]. Au vu de cette proposition, borner  $\operatorname{Re}(\gamma)$  revient à le majorer. Notons que nous n'avons pas réellement besoin de cette proposition.

**Conjecture 1**

$$\forall \theta \in \mathbb{W}, \text{ la suite } \operatorname{Re}(\gamma_{\frac{p_n}{q_n}}) \text{ est bornée.}$$

Dans cet énoncé, la borne peut dépendre de  $\theta$ . En fait, on conjecture plus fort :  $\forall p \wedge q = 1, \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1$  (voir la section 4).

Pour énoncer la deuxième conjecture, nous aurons besoin des coordonnées de Fatou. Nous utiliserons les notations et les définitions de la partie III. Les fonctions  $\phi_{-,i} : K^i, i \in \mathcal{A}_q^-,$  sont les coordonnées de Fatou attractives étendues, et les  $\psi_{+,j}, j \in \mathcal{A}_q^+,$  les paramétrisations de Fatou répulsives étendues. Soit  $K\mathcal{F}_j = \psi_{+,j}^{-1}(K), j \in \mathcal{A}_q^+.$  Cet ensemble est bi-invariant par  $T_1$ . Les  $K\mathcal{F}_j$  pour différentes valeurs de  $j$  sont tous identiques à translation près. Aussi, nous noterons  $K\mathcal{F} = K\mathcal{F}_{1/2}$  et  $\overline{K\mathcal{F}} = \overline{K\mathcal{F}}_{1/2}.$

**Conjecture 2**

$$\forall \theta \in \mathbb{W}, \operatorname{Leb}\left(\mathcal{C}_{\mathcal{Y}\mathcal{L}} \setminus \overline{K\mathcal{F}}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On suppose en fait que la conjecture 2 est vraie pour tout  $\theta$  de type borné, mais on n'utilisera que des  $\theta \in \mathbb{W}.$

Nous énonçons plus loin dans ce texte deux hypothèses, c'est à dire des affirmations dont nous n'avons pas inclus la preuve dans la présente thèse.

**Théorème 1**

*Si les conjectures 1 et 2, ainsi que les hypothèses 3 et 4 sont vraies, alors il existe un ensemble dense de  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $\text{Leb}(J_\theta) > 0$  et 0 est un point de Crémer pour  $P_{12\pi\theta}$ .*

Et on peut même s'arranger, pour tout  $\theta_0 \in \mathbb{W}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour que l'on ait  $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$  et  $\text{Leb } J_\theta$  arbitrairement proche de  $\text{Leb } K_{\theta_0}$ . Par contre l'argument ne donne pas a priori un ensemble gras (résiduel) de valeurs de  $\theta$  pour lesquels  $\text{Leb } J_\theta > 0$  : même en ayant démontré les deux conjectures, la question resterait ouverte.

## 2. Définitions et outils utilisés

### 2.1 A parte sur les fractions continues

Soit  $[\ ] = \infty$ . Pour  $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , soit  $[x] = x$  et pour  $y \in \mathbb{R}$ , soit

$$o_y(x) = y + 1/x$$

homographie de  $\mathbb{R} \cup \infty$ , inversant son orientation. Elle agit comme la matrice

$$M_y = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

agit sur l'espace projectif  $\mathbb{RP}^1$ , c'est à dire l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ , via l'identification par l'inverse de la pente. Pour  $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ , définissons  $[y_0, \dots, y_n, x] = o_{y_0} \circ \dots \circ o_{y_n}(x)$ . C'est une homographie inversant l'orientation si  $n$  est pair et la préservant si  $n$  est impair. Elle vaut  $[y_0, \dots, y_n]$  en  $x = \infty$ , et  $[y_0, \dots, y_{n-1}]$  en  $x = 0$  (c'est à dire  $[\ ] = \infty$  si  $n = 0$ ).

Un nombre rationnel admet deux développements finis en fraction continue : l'un de la forme  $[b_0, \dots, 1 + b_n]$  et l'autre de la forme  $[b_0, \dots, b_n, 1]$ .

Soit  $[a_0, \dots, a_m]$  l'un de ces deux développements finis en fraction continue de  $p/q$ . Si  $m$  est pair, nous posons alors  $\nu = \nu(m) = 1$ , et si  $m$  est impair, et nous posons  $\nu = \nu(m) = -1$ . Ainsi,  $m$  est déterminé par la donnée de  $p/q$  et  $\nu$ . Pour  $\omega \in \mathbb{R}$ , soit  $\theta(k) = \theta(p/q, \nu, k, \omega) = [a_0, \dots, a_m, k, \omega]$ . C'est une suite tendant vers  $p/q$  et décroissante (donc  $> p/q$ ) à partir d'un certain rang si  $\nu = 1$ , et croissante (donc  $< p/q$ ) à partir d'un certain rang si  $\nu = -1$ . Si  $\omega = [b_0, b_1, \dots]$  avec  $b_i \in \mathbb{N}^* \forall i \geq 0$ , alors  $\theta(k) = [a_0, \dots, a_m, k, b_0, b_1, \dots]$ .

Définissons  $\mathcal{R}_{p/q, \nu}(x) = o^{-1}(x)$  où  $o$  est l'homographie  $x \mapsto [a_0, \dots, a_m, x]$ , et  $[a_0, \dots, a_m]$  est celui des deux développements finis de  $p/q$  tel que  $\nu = (-1)^m$ . Nous omettrons l'indice  $p/q$  quand il n'y aura pas d'ambiguïté. Soit  $\mathcal{T}_\nu(x) = -\nu \mathcal{R}_\nu(x)$ , homographie qui préserve l'orientation de la droite projective réelle. On a la relation  $\mathcal{R}_+(x) + \mathcal{R}_-(x) = -1$ . Donc, modulo 1,  $\mathcal{T}_\nu(x)$  ne dépend pas de  $\nu$ , et nous noterons  $\mathcal{T}(x)$  son image dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (définie quand  $x \neq p/q$ ).

Quels sont les coefficients de l'homographie  $\mathcal{R}_{p/q, \nu}$ ? Soit  $r/s$  ( $s \geq 0$ ) l'écriture irréductible du nombre  $[a_0, \dots, a_{m-1}]$  (c'est  $1/0$  si  $m = 0$ ). Considérons le produit de matrices  $M = M_{a_0} \cdots M_{a_m}$  (c'est la matrice identité si  $m = 0$ ), qui représente



la fonction  $o$ . Notons  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Les coefficients de  $M$  sont entiers, positifs ou nuls sur la ligne du bas (par récurrence), et son déterminant vaut  $(-1)^{m+1}$  donc deux coefficients d'une même colonne sont premiers entre eux. On calcule  $o(\infty) = a/c$ , donc  $a = p$  et  $c = q$ . On calcule  $o(0) = b/d$ , donc  $b = r$  et  $d = s$ . Donc

$$M = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

L'inverse  $\mathcal{R}_{p/q,\nu}$  de  $o$  peut se représenter par la matrice inverse. Donc

$$\mathcal{R}_{p/q,\nu}(\theta) = -\frac{s\theta - r}{q\theta - p}$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$\mathcal{R}_{p/q,\nu}(\theta) = \frac{\nu}{q^2(\theta - \frac{p}{q})} - \frac{s}{q}$$

Notons également que si  $q = 1$ , alors  $s = 0$  quand  $\nu = 1$ , et  $s = 1$  quand  $\nu = -1$ , et que si  $q > 1$ , alors  $s$  est l'unique entier tel que  $0 < s < q$  et tel que

$$\nu + sp = 0 \pmod{q}$$

D'après le sens de variation des fonctions  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{T}$ , on déduit que quand  $\theta \rightarrow p/q$  tout en vérifiant  $(\theta - p/q)\nu > 0$ , alors on a  $\mathcal{R}_\nu(\theta) \rightarrow +\infty$ , et  $\mathcal{T}_\nu(\theta) \rightarrow -\nu\infty$ .

Soit  $R : S^1 \rightarrow S^1$  la rotation d'angle  $2\pi\theta$ . Pour  $\theta$  assez proche de  $p/q$  et tel que  $(\theta - p/q)\nu > 0$ , considérons le plus petit segment  $S \subset S^1$  contenant 1 et  $R^q(1)$ . Alors l'application de premier retour de  $S$  dans lui-même sous l'action de  $R$  (*attention*, nous prenons  $R$  et non  $R^q$ ) induit, quand on identifie les deux extrémités de  $S$ , une rotation d'angle  $-2\pi\nu\mathcal{R}_\nu(\theta)$  modulo  $2\pi$ , autrement dit  $2\pi\mathcal{T}(\theta)$ .

## 2.2 Objets limites de l'implosion

Soit  $\nu = 1$  ou  $-1$ . Nous allons nous intéresser au bout  $b\mathbf{i}\infty$  du cylindre d'Écalle, où

$$b = \nu$$

Expliquons en quelques mots la raison de ce choix : en n'étudiant que les polynômes quadratiques possédant un point fixe neutre, nous restons sur la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot, et les applications de cornes perturbées correspondantes (non définies dans cette thèse) sont neutres au bout  $\nu\mathbf{i}\infty$ ; le choix  $b = -\nu$  correspondrait au bord de la composante attachée à la cardioïde au point correspondant à  $P_{p/q}$ . Dans la suite, nous utiliserons le symbole  $\nu$  pour désigner aussi bien le bout  $b$  que le sens de l'implosion.

Je rappelle quelques notations de la partie III : les applications de Lavaurs sont les fonctions  $g_\sigma : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\sigma \in \mathbb{C}$  et les applications de cornes sont les fonctions  $h_{\sigma,j} : K\mathcal{F}_j \rightarrow \mathbb{C}$ . Ces fonctions dépendaient d'un choix d'une phase de référence. Nous allons la choisir de sorte que la dérivée de  $\overline{h}_{\sigma,j}$  au bout  $\nu i\infty$ , qui ne dépend pas de  $j$ , soit égale à 1 quand  $\sigma = 0$ . Notons que cette convention implique que la dérivée de  $\overline{h}_{\sigma,j}$  au bout  $\nu i\infty$  vaut  $e^{i2\pi\nu\sigma}$ , et que la dérivée au bout  $-\nu i\infty$  vaut  $e^{-i2\pi\nu(\sigma+C)}$  pour une certaine constante  $C \in \mathbb{C}$ . Comme la phase de référence dépend du choix de  $\nu$ , on notera parfois  $g_{\sigma,\nu}$  et  $h_{\sigma,\nu,j}$  au lieu de  $g_\sigma$  et  $h_{\sigma,j}$ , quand une ambiguïté est possible.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{P} & K^0 & \xrightarrow{P} & K^2 & \xrightarrow{P} & K^4 & \xrightarrow{P} & \cdots \\
& & \downarrow \phi_{-,0} & & \downarrow \phi_{-,2} & & \downarrow \phi_{-,4} & & \\
\cdots & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_0 & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_2 & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_4 & \xrightarrow{1/q} & \cdots \\
& & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & \\
\cdots & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{1/2} & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{5/2} & \xrightarrow{1/q} & \mathbb{C}_{9/2} & \xrightarrow{1/q} & \cdots \\
& & \downarrow \psi_{+,\frac{1}{2}} & & \downarrow \psi_{+,\frac{5}{2}} & & \downarrow \psi_{+,\frac{9}{2}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} & \xrightarrow{P} & \cdots
\end{array}$$

FIG. 2.1 – Ce diagramme commutatif rappelle les relations entre les divers objets limites de l'implosion, en illustrant le cas particulier  $p/q = 2/5$  et  $\nu = +1$ . Une flèche avec  $\sigma$  signifie  $T_\sigma$ .

Nous introduisons aussi de nouvelles définitions : Soit  $K_L = K_L(p/q, \sigma, \nu)$  l'ensemble des points de  $\mathbb{C}$  qui par itération de  $g_{\sigma,\nu}$ , soit tombent sur  $J$ , soit ne sortent jamais de  $K$ , et soit  $K_L\mathcal{F}_j$  son image réciproque par  $\psi_{+,j}$ . On appelle  $K_L$  *ensemble de Julia-Lavaurs*. Soit  $P = P_{p/q}$ . On appelle *dynamique d'ordre 2* l'ensemble formé des applications suivantes : les  $P^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et les  $P^l \circ g_{\sigma,\nu}^{m-1} \circ g_{\sigma+n,\nu}$ ,  $(m, n, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, q-1\}$ . On a les propriétés élémentaires :  $g_{\sigma+1} = P^q \circ g_\sigma$ , et  $P \circ g_\sigma = g_\sigma \circ P$ . La dynamique d'ordre 2 est donc un monoïde pour la composition, isomorphe à  $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (b = 0 \text{ et } a \geq 0) \text{ ou } (b \geq 1)\}$  muni de l'addition sur chaque coordonnée.

Pour  $\sigma = \omega$  réel, irrationnel, et de type borné,  $\widehat{h}_{\omega,\nu,j}$  a un point fixe neutre en  $\nu i\infty$ , de nombre de rotation diophantien  $= \nu\omega$ . Donc ce point fixe est linéarisable, d'après un théorème de Siegel (voir [Y]), ou bien d'après la partie II. Le domaine maximal de linéarisation est un disque topologique, et une composante connexe de l'intérieur de  $\widehat{K_L\mathcal{F}_j}(p/q, \omega, \nu)$ , où  $\widehat{K_L\mathcal{F}}$  désigne  $K_L\mathcal{F} \cup \{-i\infty, i\infty\}$  (voir la partie IV, ou bien [L], théorème 3.7.2 ; il n'y démontre les choses que pour  $p/q = 0/1$ , mais cela se généralise à n'importe quel  $p/q$ ). On appellera *disque de Siegel de  $\widehat{h}_{\omega,j}$*  et on notera  $\overline{\Delta}'_j$ , ce domaine privé du bout qu'il contient. On appellera *disque de Siegel virtuel de  $h_{\omega,j}$*  sa préimage  $\Delta'_j$  par la projection  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ . Les  $q$  images directes  $\psi_{+,j}(\Delta'_j)$  sont

appelées *disques de Siegel virtuels* de  $g_{\omega,\nu}$ . Ils forment un cycle pour  $P$  de  $q$  disques topologiques adhérant au point fixe 0 de  $P$  (voir la partie IV, corollaire 1.4).

Dans la partie IV, on a démontré en particulier la proposition suivante (où nous omettons l'indice  $j$ ) :

**Proposition 2.1** *Soit  $M \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\omega \in \mathbb{R}$  un irrationnel de type borné par  $M$ . Alors*

1. *Le bord du disque de Siegel de  $\overline{h}_{\omega,\nu}$  est un quasicerclé passant par le point critique principal de  $\overline{h}$  au bout  $\nu i\infty$ .*
2. *Le module de l'anneau séparant ce disque de Siegel du bord de  $\overline{KF}$  est minoré par une constante  $C(M)$  indépendante de  $p/q$  et de  $\omega$  (pourvu qu'il soit de type borné par  $M$ ).*
3. *Soit  $\overline{V}_0$  le complémentaire de la composante de l'intérieur de  $\overline{KF}$  qui contient un voisinage de  $+i\infty$ . La mesure de Lebesgue de  $\overline{h}^{-1}(\overline{\Delta}') \cap \overline{V}_0$  est minorée par une constante  $C'(M)$  indépendante de  $\omega$  et de  $p/q$ .*

Et avons énoncé l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3**  $\forall p \wedge q = 1, \forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  de type borné,  $\forall \nu = 1$  ou  $-1$ ,

$$\text{Leb } \partial K_L \left( \frac{p}{q}, \omega, \nu \right) = 0$$

Je n'ai pas trouvé dans [L] la proposition suivante, aussi j'en ai fourni une démonstration dans la partie III :

**Proposition 2.2** *Pour tout  $\sigma \in \mathbb{C}$ , l'application  $\overline{h}_\sigma$  a au plus un cycle non répulsif.*

Avec cette proposition, plus le théorème de non-errance de Sullivan-Lavaurs démontré dans [L], on en déduit le corollaire suivant, nécessaire dans la partie démonstrative de cet article.

**Corollaire 2.3** *Soit  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  de type borné. Alors toute composante connexe de  $K_L(p/q, \omega, \nu)$  est une préimage par une fonction de la dynamique d'ordre 2, d'un des disques de Siegel virtuels de  $g_{\omega,\nu}$ .*

Cette proposition est vraie plus généralement dès que  $h_\sigma$  a un disque de Siegel virtuel (c'est à dire dès que  $\overline{h}_\sigma$  a un multiplicateur neutre linéarisable en un bout du cylindre).

Nous utiliserons par ailleurs quelques lemmes sur la structure des applications en jeu. Voir la section 2.3 de la partie III pour plus de détails. Rappelons que les points précritiques de  $P$  sont les  $z \in \mathbb{C}$  tels qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P^n(z)$  est le point critique  $c$  de  $P$ , et les points postcritiques de  $P$  sont les  $P^n(c)$  pour  $n > 0$ .

**Lemme 2.4**

1. Les points critiques de  $\phi_{-,i}$  sont les points précritiques de  $P$  appartenant à  $K^i$ .
2. L'ensemble des valeurs critiques de  $\phi_{-,i}$  est de la forme  $v_i - \mathbb{N}$  pour un certain  $v_i \in \mathbb{C}$ .
3. Les valeurs critiques de  $\psi_{+,j}$  sont les points postcritiques de  $P$ .
4. Conséquence de 1 et 3 : un point critique de  $h_j$  s'envoie par  $\psi_{+,j}$  sur un point précritique ou postcritique de  $P$ .
5. L'ensemble des valeurs critiques de  $h_{\sigma,j(i)}$  est égal à  $v_i + \sigma + \mathbb{Z}$ .
6.  $\phi_{-,i}$  est un revêtement de  $K^i$  privé de la grande orbite du point critique, vers  $\mathbb{C}$  privé de  $v + \mathbb{Z}$ , où  $v$  est n'importe quelle valeur critique de  $\phi_{-,i}$ .
7. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $V_c$  des valeurs critiques de  $h_{\sigma,j}^m$  est sans accumulation dans  $\mathbb{C}$ . De plus, la fonction  $f = h_{\sigma,j}^m$  est un revêtement de  $\text{Def}(f) \setminus f^{-1}(V_c)$  dans  $\mathbb{C} \setminus V_c$ .
8. Conséquence de 7 : pour tout ouvert  $U$  simplement connexe de  $\mathbb{C}$  ne rencontrant pas l'ensemble postcritique de  $h_{\sigma,j}$ , la fonction  $f = h_{\sigma,j}^m$  est un isomorphisme de toute composante connexe de  $f^{-1}(U)$  vers  $U$ .
9. Conséquence de 2, 5, 6 et 7 : pour tout ouvert  $U$  simplement connexe de  $\mathbb{C}$  ne rencontrant pas l'ensemble postcritique de  $h_{\sigma,j}$ , la fonction  $f = h_{\sigma,j}^m \circ T_\sigma \circ \phi_{-,i}$  est un isomorphisme de toute composante connexe de  $f^{-1}(U)$  vers  $U$ .

Attention cependant, les éléments de  $v_i + \mathbb{Z}$  ne sont pas tous des valeurs critiques de  $\phi_{-,i}$ . Les préimages des valeurs critiques de  $\phi_{-,i}$ , ne sont pas forcément des points critiques, et ceci est également valable pour  $h_j$ .

**Proposition 2.5** Pour  $b = \pm 1$ , notons  $t_b = \lim h_\sigma(z) - z$  quand  $\text{Im}(bz) \rightarrow +\infty$ . Alors

$$\text{Im}(t_- - t_+) = 2\pi \text{Re}(\gamma)$$

En particulier cette différence est indépendante de  $\sigma$ . Le nombre  $\gamma$  est défini page 154. Plus précisément,  $t_+ - t_- = \frac{s}{q} - i2\pi\gamma_{p/q} \pmod{\mathbb{Z}}$  où  $s$  a été introduit à la section 2.1 (voir la partie III).

Enfin, rappelons le théorème de Lavaurs :

**Proposition 2.6 (Théorème de Lavaurs)**  $\forall p \wedge q = 1, \forall \nu = 1$  ou  $-1$ , il existe une constante  $N \in \mathbb{Z}$  telle que  $\forall \sigma \in \mathbb{C}$ , pour toute suite  $N_n \in \mathbb{N}$  tendant vers  $+\infty$  et toute suite  $\theta_n \in \mathbb{C}$  tendant vers  $p/q$ , si  $\mathcal{R}_{p/q,\nu}(\theta_n) = N_n - \sigma + N + o(1)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $P_{\theta_n}^{qN_n} \rightarrow g_{\sigma,b}$  uniformément sur tout compact de  $\overset{\circ}{K}$ , avec  $b = \nu$ .

### 2.3 Disques de Siegel virtuels

Soit  $i \in \mathcal{A}_q^-$  et  $j = j(i) = i + \frac{\nu}{2}$ . Soit  $\Delta(k) = \Delta(p/q, o_r, \nu, k)$  le disque de Siegel de  $P_{\theta(k)}$ , où  $\theta(k) = \theta(p/q, \nu, k, o_r) = [a_0, \dots, a_m, k, 1, 1, \dots]$ . Nous savons (d'après des résultats de Herman, Świątek, Douady, Ghys et Shishikura) que  $\partial\Delta(k)$  est un quasicerce. Notons  $\Delta'_j(p/q, o_r, \nu, +\infty)$  le disque de Siegel virtuel  $\Delta'_j$  de  $h_{o_r, \nu, j}$ , et soit  $\Delta_i(p/q, o_r, \nu, +\infty) = \psi_{+, j}(\Delta'_j)$ , où  $j = i + \nu/2$  :  $\Delta_i$  est le disque de Siegel virtuel de l'application de Lavaurs.

Nous admettrons le fait suivant :

#### Hypothèse 4

$$\begin{aligned} \forall p \wedge q = 1, \forall \nu \in \{-1, 1\}, \forall i, \forall C \text{ compact } \subset \Delta_i(p/q, o_r, \nu, +\infty), \\ \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N, C \subset \Delta(p/q, o_r, \nu, k) \end{aligned}$$

Nous ne la nommons pas conjecture, car nous pensons qu'elle est une conséquence plus ou moins élémentaire de la théorie de l'implosion parabolique.

On conjecture en fait qu'il y a convergence dans les cylindres des disques de "Siegel au bout", au sens fort suivant : il existe un voisinage  $V$  du disque  $\mathbb{D}$ , un réel  $K > 1$  et une suite d'applications  $K$ -quasi conformes définies sur  $V$ , envoyant  $\mathbb{D}$  sur les disques de Siegel, et convergeant uniformément.

**Lemme 2.7** *Si l'hypothèse 4 est vraie, alors  $\forall p \wedge q = 1, \forall \omega$  irrationnel de type borné et pour  $[a_0, \dots, a_n]$  un des deux développements de  $p/q$ , soient  $\nu(n) = (-1)^n$  et  $\theta_k = [a_0, \dots, a_n, k, \omega]$ . Pour tout compact  $C \subset \overset{\circ}{K}_L\left(\frac{p}{q}, -\omega, \nu(n)\right)$ ,  $\exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N$ ,  $C \subset \overset{\circ}{K}(\theta_k)$ .*

**Preuve** : Sous-entendons les indices  $\frac{p}{q}, -\omega, \nu$ . Un tel compact  $C$  est inclus dans une union finie de composantes connexes de  $\overset{\circ}{K}_L$ , et son intersection avec n'importe laquelle elles est compacte. Il suffit donc de prouver le lemme avec l'hypothèse supplémentaire que  $C \subset U$ , où  $U$  est une composante connexe de  $\overset{\circ}{K}_L$ . D'après le corollaire 2.3,  $\overset{\circ}{K}_L\left(\frac{p}{q}, -\omega, \nu\right)$  est la réunion des préimages du disque de Siegel virtuel  $\Delta_0$  d'index 0 par les éléments  $f$  de la dynamique d'ordre 2. Soit  $l, m \in \mathbb{N}$  tels que  $P_{p/q}^l \circ g^m$  envoie  $U$  dans  $\Delta_0$ . Il envoie  $C$  sur un compact  $C'$  de l'ouvert  $\Delta_0$ . Soit  $D$  compact voisinage de  $C$  dans  $\mathbb{C}$  et inclus dans  $\Delta_0$ . Alors d'après le théorème de Lavaurs (proposition 2.6),  $P_{\theta_k}^{N_k q} \rightarrow g$  uniformément sur tout compact de  $\overset{\circ}{K}$ , où  $N_k = k + \left(\frac{1}{o_r} - o_r\right) - N = k - 1 - N \in \mathbb{N}$  pour  $k$  suffisamment grand. Comme  $C$  est compact et inclus dans l'ouvert de définition de  $g^m$ , on en déduit que  $P_{\theta_k}^{l+mN_k q} \rightarrow P_{p/q}^l \circ g^m$  uniformément sur  $C$ , donc il existe un rang à partir duquel  $P_{\theta_k}^{l+mN_k q}(C) \subset D$ . Maintenant, d'après le corollaire 4, pour  $k$  suffisamment grand,  $D \subset \overset{\circ}{K}(\theta_k)$ . D'où  $C \subset \overset{\circ}{K}(\theta_k)$ . ■

### 3. Preuve

Les lemmes suivants concernent la mesure non pas des ensembles  $K$  mais de leur intérieur. En fait, cela n'a pas d'importance car le bord de  $K_\theta$  est de mesure nulle dès que  $\theta \in \mathbb{Q}$  (voir [DU]) ou  $\theta \in \mathbb{W}$  (voir [Pe1], [MM] ou [Ya]).

**Lemme 3.1 (approximation des Siegel par des paraboliques)**

$$\forall \theta \in \mathcal{S}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) \cap \overset{\circ}{K}_\theta}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}_\theta} = 1$$

où  $p_n/q_n$  sont les réduites de  $\theta$

Ce lemme a été démontré par l'auteur dans la partie I.

**Lemme 3.2 (approximation des paraboliques par des Siegel)**

Si les conjectures 1, 2 et les hypothèses 3 et 4 sont vraies, alors

$$\forall \theta \in \mathbb{W}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = 1$$

où

$$\alpha\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\theta_{n,k})}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}$$

et  $\theta = [a_0, a_1, \dots]$  où  $(a_n)$  stationne en 1,  $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$  sont les réduites de  $\theta$  et  $\theta_{n,k} = [a_0, \dots, a_n, k, 1, 1, \dots]$ .

Ce lemme sera prouvé un peu plus loin dans cet article. Remarquez que l'on n'a pas affirmé que la perte de mesure  $\alpha(p/q)$  due à l'implosion en disques de Siegel virtuels de nombre de rotation  $o_r$  était d'autant plus petite que  $q$  est élevé : ce n'est pas vrai par exemple pour la suite  $1/q$ . Nous ne pensons pouvoir maîtriser la perte de mesure que dans le cas où  $p/q$  est une réduite d'ordre élevé d'un élément de  $\mathbb{W}$  (ou d'un irrationnel de type borné).

*Preuve du théorème 1 à partir des lemmes 3.1 et 3.2 :*

Nous rappellerons pour cela deux propriétés des réduites  $p_n/q_n$  d'un nombre irrationnel  $\theta$  : premièrement

$$q_n q_{n+1} \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

Deuxièmement, si  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux et  $|\theta - p/q| < 1/2q^2$ , alors  $p/q$  est une réduite.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Construisons un  $\theta \in ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \setminus (\mathbb{Q}\mathcal{S})$  pour lequel  $\text{Leb}(J_\theta) > 0$ .

1- Pour cela nous définissons par récurrence des suites  $\alpha_i \in \mathbb{W}$  et  $u_i/v_i \in \mathbb{Q}$  :

- Soient  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 1$  et prenons pour  $\alpha_0$  n'importe quel élément de  $\mathbb{W}$  vérifiant  $|\alpha_0 - x| < \varepsilon/2$ .

- Soit  $i \in \mathbb{N}$ , et supposons  $\alpha_i$  et  $u_i/v_i$  construits.

Notons  $\alpha_i = [a_0, a_1, \dots]$ , et soient  $p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$  les réduites de  $\alpha_i$ ,  $\theta_{n,k} = [a_0, \dots, a_n, k, 1, 1, \dots]$ , et fixons maintenant  $n \in \mathbb{N}$  assez grand pour que

$$\left| \alpha_i - \frac{p_n}{q_n} \right| < \varepsilon/2^{3+i}$$

$$q_n \geq 2^{v_i} ,$$

$$\frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(p_n/q_n)}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\alpha_i)} \geq 1 - 2^{-(1+i)}$$

(c'est possible d'après le lemme 3.1) et

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\theta_{n,k})}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(p_n/q_n)} \geq 1 - 2^{-(2+i)}$$

(c'est possible d'après le lemme 3.2). Remarquer que l'on pourrait se contenter d'une lim sup : le lemme 3.2 est plus fort que nécessaire.

On peut donc choisir  $k \in \mathbb{N}$  assez grand pour que

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \theta_{n,k} \right| < \varepsilon/2^{3+i} ,$$

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \theta_{n,k} \right| < 2^{-q_n} \text{ et}$$

$$\frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\theta_{n,k})}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(p_n/q_n)} \geq 1 - 2^{-(1+i)}$$

Nous posons  $\alpha_{i+1} = \theta_{n,k}$ ,  $u_{i+1} = p_n$  et  $v_{i+1} = q_n$ .

2- Convergence des deux suites et propriétés de la limite :

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq \left| \alpha_{i+1} - \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} \right| + \left| \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} - \alpha_i \right| = \left| \theta_{n,k} - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha_i \right| < \frac{2\varepsilon}{2^{3+i}}$$

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2^{2+i}}$$

donc la suite  $(\alpha_i)$  converge, et sa limite  $\theta$  vérifie  $|\theta - x| \leq |x - \alpha_0| + \sum_{i \geq 0} |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \sum_{l \geq 1} \varepsilon/2^l :$

$$|\theta - x| < \varepsilon$$

Estimons  $\left| \alpha_{i+1} - \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} \right| = \left| \theta_{n,k} - \frac{p_n}{q_n} \right| < 1/2^{q_n} = 1/2^{v_{i+1}}$ . Donc

$$\forall i \geq 1, \left| \alpha_i - \frac{u_i}{v_i} \right| \leq 1/2^{v_i}$$

En particulier,  $\frac{u_i}{v_i}$  converge également vers  $\theta$ . Remarquons que  $v_{i+1} \geq 2^{v_i} \geq v_i + 1$ , et  $v_i \geq 1$ , et d'autre part  $\frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} = \frac{p_n}{q_n}$  est par définition une réduite de  $\alpha_i$ . Donc  $\left| \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} - \alpha_i \right| < 1/v_{i+1}^2$  donc  $\forall i \geq 1, \left| \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} - \frac{u_i}{v_i} \right| \leq \left| \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} - \alpha_i \right| + \left| \alpha_i - \frac{u_i}{v_i} \right| \leq 1/v_{i+1}^2 + 1/2^{v_i} \leq 1/2^{2v_i} + 1/2^{v_i}$  :

$$\forall i \geq 1, \left| \frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} - \frac{u_i}{v_i} \right| \leq 2/2^{v_i}$$

donc  $\left| \theta - \frac{u_i}{v_i} \right| \leq \sum_{j \geq i} \left| \frac{u_{j+1}}{v_{j+1}} - \frac{u_j}{v_j} \right| \leq \sum_{j \geq i} 2/2^{v_j} \leq \sum_{k \geq 0} 2/2^{v_i+k}$

$$\forall i \geq 1, \left| \theta - \frac{u_i}{v_i} \right| \leq \frac{4}{2^{v_i}}$$

Une conséquence immédiate est que  $\theta$  est irrationnel ( $u_i/v_i$  étant irréductible). Pour  $v_i \geq 10$  (ce qui arrive pour  $i$  suffisamment grand), on a  $4/2^{v_i} < 1/2v_i^2$ , ce qui fait que  $u_i/v_i$  est une réduite de  $\theta$ . On déduit alors de la majoration de  $|\theta - u_i/v_i|$  que

$$\theta \notin \mathcal{S}$$

Il suffit pour cela d'appliquer la négation du critère de Brjuno (voir [Y]), ou bien le critère plus restreint  $\liminf \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} > 0$  dont nous donnons une preuve dans la partie I (et dont la preuve ne fait pas intervenir le théorème d'Ahlfors-Bers); on aurait pu aussi appliquer le critère de Crémer (voir [PM1]) en imposant  $q_n \geq \exp i 2^{v_i}$  et  $\left| \frac{p_n}{q_n} - \theta_{n,k} \right| < \exp -i 2^{q_n}$ .

3- Estimation de l'aire de  $J(\theta)$  :

$$\frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\alpha_{i+1})}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\alpha_i)} \geq (1 - 2^{-(1+i)})^2 \text{ donc}$$

$$\frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\alpha_i)}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}(\alpha_0)} \geq \prod_{j=1}^i (1 - 2^{-j})^2 \geq C^2$$

où  $C = \prod_{j=1}^{+\infty} (1 - 2^{-j}) > 0$ . En particulier

$$\exists C' > 0 \forall i \in \mathbb{N}, \text{Leb } K(\alpha_i) \geq C'$$

Or d'une part la fonction de  $\mathbb{R}$  (muni de sa métrique usuelle) dans l'ensemble  $\mathcal{E}$  des compacts de  $\mathbb{C}$  (muni des semi-distances de Hausdorff) qui à  $\theta$  associe  $K(\theta)$  est semi-continue supérieurement (voir [D]) :  $\lim(x_n) = x \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, K(x_n) \subset_\varepsilon K(x)$ , ce que nous noterons  $\limsup K(x_n) \subset K(x)$ , et d'autre part la fonction de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un compact  $K$  de  $\mathbb{C}$  associe sa mesure de Lebesgue vérifie :  $\limsup K_n \subset K \implies \limsup(\text{Leb } K_n) \leq \text{Leb } K$ . Donc  $\text{Leb } K(\theta) \geq$



$\limsup \text{Leb } K(\alpha_i) \geq C' > 0$ . Or  $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \mathcal{S})$ , donc le point fixe 0 de  $P_\theta$  n'est pas linéarisable, donc d'après la classification des composantes de Fatou (voir [CG]),  $K(\theta) = J(\theta)$ , donc

$$\text{Leb } J(\theta) > 0$$

□

*Réduction :*

Pour prouver le lemme 3.2, il suffit démontrer un lemme analogue mais plus simple :

**Lemme 3.3 (lemme principal)**

*Si les conjectures 1, 2, ainsi que l'hypothèse 3 sont vraies, alors*

$$\forall \theta \in \mathbb{W}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}_L\left(\frac{p_n}{q_n}, -o_r, \nu(n)\right)}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)} = 1 .$$

Le passage de 3.3 à 3.2 est facile avec le résultat suivant :

**Lemme 3.4**

*Si l'hypothèse 4 est vraie, alors  $\forall p \wedge q = 1$ ,  $\forall \omega$  irrationnel de type borné et pour  $[a_0, \dots, a_n]$  un des deux développements de  $p/q$ ,  $\nu(n) = (-1)^n$  et  $\theta_k = [a_0, \dots, a_n, k, \omega]$ , on a*

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \text{Leb } \overset{\circ}{K}(\theta_k) \geq \text{Leb } \overset{\circ}{K}_L\left(\frac{p}{q}, -\omega, \nu(n)\right) .$$

**Preuve :** C'est une conséquence immédiate du lemme 2.7. ■

**Remarque :** On a en fait mieux :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Leb } \overset{\circ}{K}(\theta_k) = \text{Leb } \overset{\circ}{K}_L\left(\frac{p}{q}, \omega, \nu(n)\right)$ . Ceci est dû à la nullité de la mesure du bord des ensembles  $K$  et  $K_L$  en jeu (voir respectivement [Pe1] et la partie IV), et au fait élémentaire que pour tout compact du complémentaire de  $K_L$ , il finit par être dans le complémentaire de  $K(\theta_k)$  (conséquence du théorème de Lavaurs, 2.6).

### Preuve du lemme principal, 3.3 :

Fixons  $p/q$  et  $\nu$ , et abrégeons  $K(p/q)$  en  $K$ , et  $K_L(p/q, -o_r, \nu)$  en  $K_L$ .

Nous allons définir des suites de sous ensembles de  $K$  :

- $G_k$  (les points 'gagnés' au rang  $k$ ),
- $P_k$  (les points 'perdus' au rang  $k$ ) et
- $I_k$  (les points 'indéterminés' au rang  $k$ ).

$I_k$  sera fermé,  $P_k$  et  $G_k$  seront ouverts.  $(G_k, P_k, I_k)$  sera une partition de  $I_{k-1}$ , avec la convention que  $I_{-1} = K$ . On aura  $\overset{\circ}{K}_L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$  et  $K \setminus K_L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ , ce qui implique  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \partial K_L$  (rappelons que  $\partial K \subset K_L$ ). Si de plus on sait que

$$\text{Leb} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = 0$$

(ce qui est garanti par l'hypothèse 3) et

$$\exists \Lambda > 0 \forall k \geq 1, \frac{\text{Leb } P_k}{\text{Leb } G_k} \leq \Lambda$$

alors

$$\frac{\text{Leb } \overset{\circ}{K}_L}{\text{Leb } \overset{\circ}{K}} \geq \frac{1}{1 + \Lambda}$$

Il suffira alors de montrer à l'aide des conjectures 1, 2, que  $\Lambda \rightarrow 0$  quand  $p/q = p_n/q_n$  et  $n \rightarrow +\infty$ , pour en déduire le lemme principal.

Notre partition  $(G_k, P_k, I_k)$  aura la propriété suivante : pour tout  $k \geq 0$  et pour toute composante connexe  $\mathcal{I}$  de  $\overset{\circ}{I}_k$ ,  $\mathcal{I}$  sera simplement connexe et la classe d'équivalence conforme de la partition  $(\mathcal{I} \cap G_{k+1}, \mathcal{I} \cap P_{k+1}, \mathcal{I} \cap I_{k+1})$  de  $\mathcal{I}$  sera indépendante de  $\mathcal{I}$  et de  $k$ . La minoration de  $\Lambda$  que nous allons donner s'inspire de la notion de densité intrinsèque, introduite dans [J].

#### Préliminaires à la construction :

Fixons  $j$ . Nous appellerons *pièce modèle*  $M = M_j$  le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de la fermeture du disque de Siegel virtuel en coordonnées de Fatou :  $M = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta'}$ , où  $\Delta' = \Delta'_j(p/q, o_r, \nu, +\infty)$ . Les  $M_j$  pour les différentes valeurs de  $j$  sont égaux à translation près, et ils sont  $T_1$ -invariants. Soit  $M^1$  la composante connexe de la préimage de  $M$  par  $h = h_{-o_r, \nu, j}$ , qui est un voisinage d'un des bouts (en l'occurrence, le bout opposé à  $\nu i\infty$ ). Soit  $p(z) = \exp(i2\pi z)$ . Soit  $\widetilde{M} = \{\omega\} \cup p(M)$  et  $\widetilde{M}^1 = \{\omega\} \cup p(M^1)$ , avec  $\omega = \infty$  si  $\nu = 1$  et  $\omega = 0$  si  $\nu = -1$ . L'anneau  $p(\mathbb{C} \setminus K\mathcal{F}_j)$  sépare le bord de  $\widetilde{M}$  de celui de  $\widetilde{M}^1$ . Donc l'adhérence de  $\widetilde{M}^1$  dans  $\widetilde{M}$  est compacte. Par conséquent,

**Proposition 3.5**  $\forall w \in M, \exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $h^m(w) \notin M^1$ .

**Preuve :** D'après le point 8 du lemme 2.4 (avec  $m = 1$ ), la restriction  $h : M^1 \rightarrow M$  est un isomorphisme analytique, car  $M$  ne contient aucune valeur postcritique de  $h$  : d'après la proposition 2.1, celles-ci sont sur le bord du disque de Siegel virtuel  $\Delta'$ . L'ensemble  $M^1$  étant un voisinage de  $-\nu i\infty$ , il contient au moins un couple de points  $z, z'$  vérifiant  $z' = z + 1$ . Il est donc invariant par  $T_1$ . Ceci implique que  $\tilde{h} : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}$  est un isomorphisme analytique. Il en est donc de même de  $\tilde{h} : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}$ . D'après l'inégalité de Schwarz, pour la métrique hyperbolique de  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{h}$  a une dérivée  $> c > 1$  sur  $\tilde{M}_1$ . Sa réciproque  $b$  est donc strictement contractante, et comme elle fixe  $\omega$ ,  $b^m$  tend uniformément vers  $\omega$  sur  $\tilde{M}$  quand  $m \rightarrow +\infty$ . Un point  $w \in M$  tel que  $w_m = h^m(w) \in M^1$  pour tout  $m$  vérifierait  $p(w) = b^m(p(w_m))$ , donc  $\forall m \in \mathbb{N}, p(w) \in b^m(\tilde{M})$ , donc  $p(w) = \omega$ , ce qui est absurde. ■

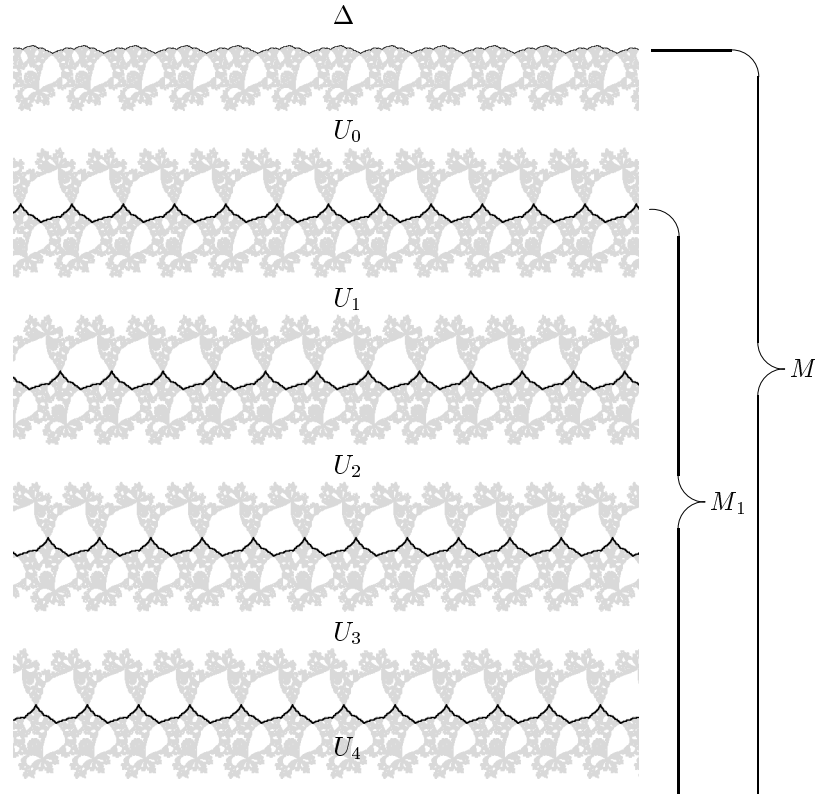


FIG. 3.1 –  $\Delta$ ,  $M$ ,  $M_1$ , et les premiers  $U_i$ .

Partitionnons  $M$  en fonction du temps d'échappement : Pour  $w \in M$ , soit  $m \in \mathbb{N}$  le rang de la première itérée de  $h$  qui envoie  $w$  dans  $M \setminus M^1$ . Le temps d'échappement de  $w$  est par définition  $m$ . Soit  $U_m = U_m^j$  l'ensemble des points de  $M$  dont le temps d'échappement est  $m$ . Attention,  $U_m$  n'est pas un ouvert.

Nous allons définir deux sous-ensembles de  $M$  :  $P_M$  et  $G_M$ . Je rappelle que l'intérieur de  $K\mathcal{F}_j = \psi_{+,j}^{-1}(K)$  est l'ensemble de définition des fonctions  $h_{\sigma,j}$ . Pour  $w \in M_j$ , soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $w \in U_m$ . Soit  $u = h_{-\sigma_r,j}^m(w)$ .

$$\begin{aligned} w \in P_{M,j} &\iff u \notin K\mathcal{F}_j \\ w \in G_{M,j} &\iff u \in K\mathcal{F}_j \text{ et } h_{-\sigma_r,j}(u) \in \Delta'_j \end{aligned}$$

Changer  $j$  modifie  $P_{M,j}$  par une translation. Il en est de même pour  $G_{M,j}$ . Nous noterons  $I_{M,j} = \overline{M} \setminus (P_M \cup G_M)$ . Attention,  $\partial M \subset I_M$  donc  $I_M \not\subset M$ .

Cette partition modèle est illustrée par la figure 3.2.

**Lemme 3.6** *Toute composante connexe  $U$  de  $\overset{\circ}{I}_M$  est incluse dans un certain  $U_m$ . Soit  $g = h_{\sigma}^{m+1} : U$  est une composante connexe de  $g^{-1}(M)$ , et  $g$  est un isomorphisme de  $U$  sur  $M$ .*

**Preuve** : La réunion des bord des ensembles  $U_m$  est incluse dans  $\partial I_M$  : en effet, elle est égale à  $\bigcup_{m \geq 0} b^m(\partial M)$  où  $b$  est la branche de  $h^{-1}$  introduite dans la preuve de la proposition 3.5 ; or, pour  $m \geq 1$ , la partie  $b^m(\partial M) \subset U_{m-1}$  et  $h^{(m-1)+1} = h^m$  envoie cette partie sur  $\partial M$ , d'où le fait que la partie est incluse dans  $I_M$ . Elle est en fait incluse dans le bord, car elle adhère à  $U_m \cap G_M$  : en effet  $\partial M$  adhère à  $U_0 \cap G_M$ , car  $h$  est holomorphe donc ouverte,  $h(\partial M) = \partial M$ ,  $h(\mathbb{C} \setminus \overline{M}) = \mathbb{C} \setminus \overline{M}$  et  $U_0$  est l'intersection avec  $M$  d'un voisinage de  $\partial M$ .

Ainsi  $U \subset U_m$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ . Comme  $h^{m+1}$  est ouverte, on déduit de la définition de  $P_M$  et  $G_M$  que  $U$  est une composante connexe de  $g^{-1}(M)$ . On déduit alors du lemme 2.4 que  $g$  est un isomorphisme de  $U$  vers  $M$ . ■

*Construction par récurrence des suites  $G_k, P_k, I_k$  :*

Note : pour des raisons pratiques, nous noterons dorénavant  $\phi_{*,i} : K^i \rightarrow \mathbb{C}_j$  où  $j = i + \nu/2$  définie par  $\phi_{*,i} = T_{-\sigma_r} \circ \phi_{-,i}$ . Rappelons que nous avons choisi les phases de références de sorte que  $\overline{h}_{\sigma}$  ait pour multiplicateur  $e^{i2\pi\nu\sigma}$  au bout  $\nu i\infty$ .

Hypothèse de récurrence  $H_k$  :  $\forall \mathcal{I}$  composante connexe de  $\overset{\circ}{I}_k$ ,  $\exists i \in \mathbb{N}$  et  $N(\mathcal{I}) \in \mathbb{N}$  tels que  $h_{-\sigma_r,j(i)}^{N(\mathcal{I})} \circ \phi_{*,i}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{I}$  sur la pièce modèle  $M^{j(i)}$ , avec  $j(i) = i + \frac{\nu}{2}$ .

*Initialisation de la récurrence* : soient

- $P_0 = \emptyset$
- $G_0$  = la réunion pour toutes les valeurs de  $i$  des préimages par  $\phi_{*,i}$  du disque de Siegel virtuel  $\Delta'_{j(i)}$
- $I_0 = K \setminus (P_0 \cup G_0)$

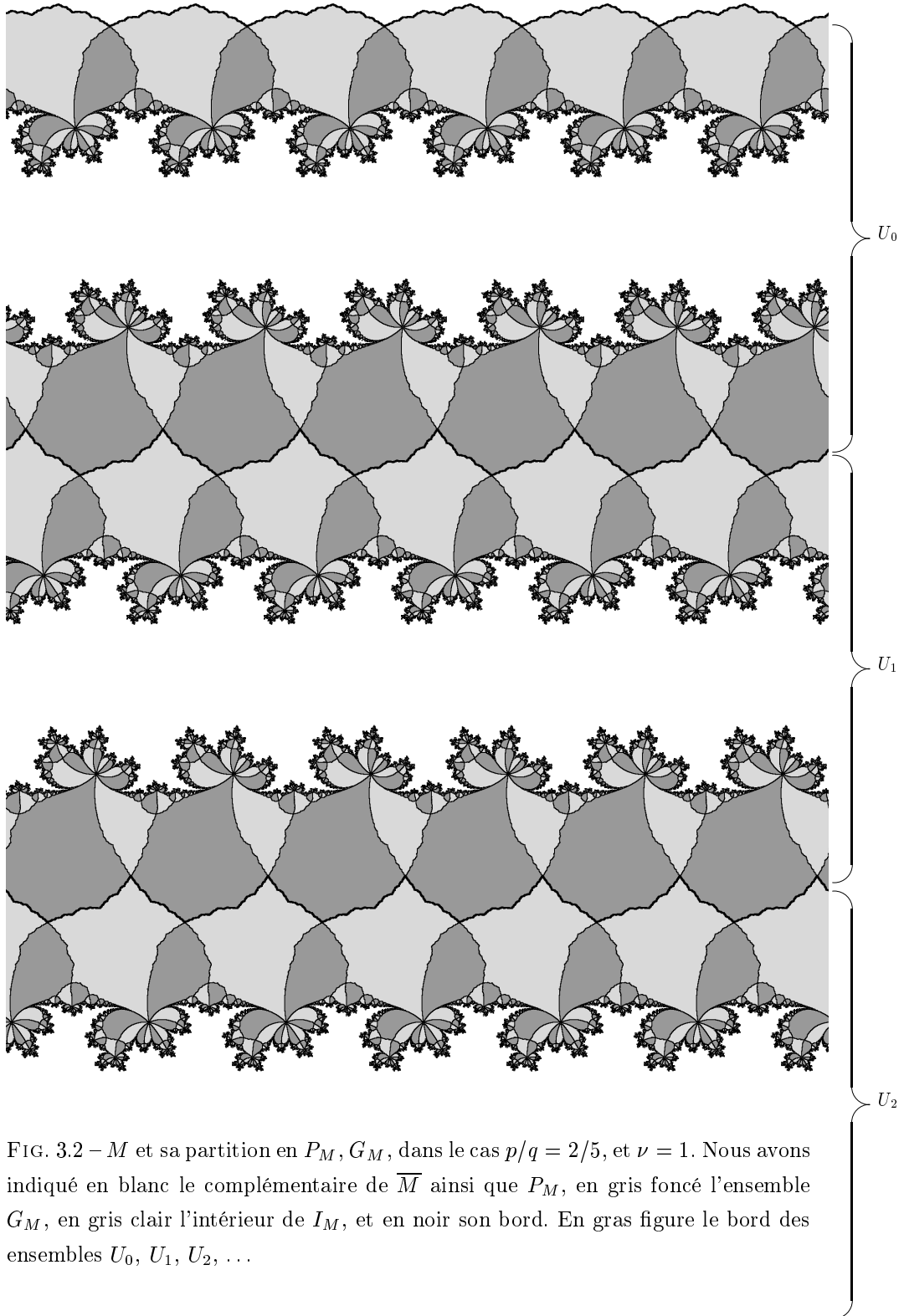


FIG. 3.2 –  $M$  et sa partition en  $P_M, G_M$ , dans le cas  $p/q = 2/5$ , et  $\nu = 1$ . Nous avons indiqué en blanc le complémentaire de  $\overline{M}$  ainsi que  $P_M$ , en gris foncé l'ensemble  $G_M$ , en gris clair l'intérieur de  $I_M$ , et en noir son bord. En gras figure le bord des ensembles  $U_0, U_1, U_2, \dots$

*Réurrence* : Soit  $k \geq 1$  et supposons la construction effectuée jusqu'au rang  $k - 1$ , et vérifiant  $H_{k-1}$ . On définit alors les sous-ensembles  $P_k$  et  $G_k$  de  $\overset{\circ}{I}_{k-1}$  de la façon suivante : soit  $\mathcal{I}$  une composante connexe de  $\overset{\circ}{I}_{k-1}$ , et  $N(\mathcal{I})$  comme dans l'hypothèse de récurrence. Pour  $z \in \mathcal{I}$ , soit  $w = h_{-o_r, j}^{N(\mathcal{I})}(\phi_{*, i}(z))$  (avec le  $i$  tel que  $z \in K^i$  et  $j = j(i)$ ). Alors

$$\begin{aligned} z \in P_k &\iff w \in P_M \\ z \in G_k &\iff w \in G_M \end{aligned}$$

Les ensembles  $P_k$  et  $G_k$  étant définis, on pose alors

$$I_k = I_{k-1} \setminus (P_k \cup G_k)$$

*Vérifions les hypothèses :*

– Il est évident que  $P_k$  et  $G_k$  sont ouverts et  $I_k$  fermé, et que  $G_{k+1}, P_{k+1}, I_{k+1}$  est une partition de  $I_k$ .

– Hypothèse de récurrence au rang 0 : soit  $i \in \mathcal{A}_q^-$  et  $j = j(i)$ . D'après 2.4, les valeurs critiques de  $\phi_{*, i}$  sont en particulier des valeurs critiques de  $h_{j(i)}$ . Donc elles sont sur le bord du disque de Siegel virtuel  $\Delta'_{j(i)}$ , d'après 2.1. Comme l'intérieur de  $I_0$  est la réunion des images réciproques de la pièce modèle  $M^{j(i)}$  par  $\phi_{*, i}$  pour  $i$  variant dans  $\mathcal{A}_q^-$  (car  $\phi_{*, i}$  est une application holomorphe donc ouverte), comme, d'après le lemme 2.4,  $\phi_{*, i}$  est un revêtement de  $K^i$  privé de la grande orbite du point critique de  $P$  vers  $\mathbb{C}$  privé des valeurs critiques de  $h_j$  (où  $j = j(i)$ ), et comme  $M^j$  est simplement connexe,  $\phi_{*, i}$  est un isomorphisme de chaque composante connexe de  $K^i \cap \overset{\circ}{I}_0$  sur  $M^j$  : on peut donc prendre  $N(\mathcal{I}) = 0$ , et  $H_0$  est vérifiée.

– Transmission de l'hypothèse de récurrence : soit  $k \geq 1$  et supposons  $H_{k-1}$  vérifiée. Comme  $I_k \subset I_{k-1}$ , toute composante connexe  $\mathcal{I}'$  de  $\overset{\circ}{I}_k$  est incluse dans une composante connexe  $\mathcal{I}$  de  $\overset{\circ}{I}_{k-1}$ . Soit  $z \in \mathcal{I}'$  et soit  $i, N(\mathcal{I})$  définis à partir de  $\mathcal{I}$  par l'hypothèse de récurrence  $H_{k-1}$ . Soit  $g = h^{N(\mathcal{I})} \circ \phi_{*, i}$ . Comme  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ , on a  $g(\mathcal{I}') \subset M$ . Donc  $g(\mathcal{I}')$  est une composante connexe de  $M \setminus (P_M \cup G_M)$ . D'après le lemme 3.6, on en déduit l'existence de  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $g(\mathcal{I}')$  est une composante connexe de  $f^{-1}(M)$  et  $f$  est un isomorphisme de  $g(\mathcal{I}')$  vers  $M$ . où  $f = h^{m+1}$ . Donc l'hypothèse  $H_k$  est vérifiée pour  $\mathcal{I}'$  avec  $N(\mathcal{I}') = N(\mathcal{I}) + m + 1$ .

– On voit en passant que  $N(\mathcal{I}') \geq N(\mathcal{I}) + 1$ . D'où  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{I}$  composante connexe de  $\overset{\circ}{I}_k, N(\mathcal{I}) \geq k$ .

– On démontre par récurrence sur  $m$  la proposition suivante. Soit  $z \in K^i$  et  $w_0 = \phi_{*, i}(z)$ . Soit  $w_{k+1} = h(w_k)$ . Considérons les visites successives  $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots$  de  $w$  dans  $U_0$ , où  $0 \leq k_1 < k_2 < \dots$ . Soit  $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  le nombre de ces visites. Alors

$z \in I_m \Leftrightarrow r > m$ . On en déduit aisément les propositions suivantes :

$$z \in G_m \Leftrightarrow r = m \text{ et } w_{1+k_m} \in \Delta'$$

$$z \in P_m \Leftrightarrow r = m \text{ et } w_{k_m} \notin K\mathcal{F}_{j(i)}$$

– Par définition, tout ce qui est dans  $G_k$  tombe dans les disques de Siegel virtuels donc appartient à  $\overset{\circ}{K}_L$ . Inversement, d'après le point précédent, tout ce qui tombe dans un disque de Siegel virtuel par  $P^l \circ g_{-o_r}^k$  pour  $l, k \in \mathbb{N}$  est dans  $G_m$ , pour un certain  $m \leq k$  : en effet, d'après les semi-conjugaisons du diagramme de la figure 2.1,  $w_k \in \Delta'_{j(i)}$ , d'où  $r \leq k$ , et comme il n'y a pas de visite ultérieure dans  $U_0$ , c'est que  $w_{1+k_r} \notin M$ , et comme il finit par tomber dans  $\Delta'$ , c'est que  $w_{1+k_r} \in \Delta'$ , (car  $\partial M$  est stable et disjoint de  $\Delta'$ ). D'après le corollaire 2.3, toute composante connexe de  $\overset{\circ}{K}_L$  est une préimage du disque de Siegel virtuel. Donc

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = \overset{\circ}{K}_L$$

– Tout  $z \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$  est soit dans l'intersection des  $\overset{\circ}{I}_k$ , auquel cas  $g_{-o_r}^n(z)$  est défini  $\forall n \in \mathbb{N}$  (puisque  $N(\mathcal{I}) \geq k$  pour toute composante connexe  $\mathcal{I}$  de  $I_k$ ), soit dans le bord d'un des  $I_k$ . Dans ce cas, soit  $m \geq -2$  le dernier indice tel que  $z \in \overset{\circ}{I}_m$  (avec les conventions  $I_{-1} = K$  et  $I_{-2} = \mathbb{C}$ ). Si  $m = -2$ , alors  $z \in \partial K \subset \partial \overset{\circ}{K}_L$ . Si  $m \geq -1$ , alors soit  $\mathcal{I}$  la composante connexe de  $\overset{\circ}{I}_m$  contenant  $z$ , et  $w = \phi_{*,i}(z)$ . Par définition de  $I_{m+1}$ , auquel  $z$  appartient, et en notant  $d \in \mathbb{N}$  l'entier tel que  $w' = h^{N(\mathcal{I})}(w) \in U_d$ , alors  $h^m(w') \in K\mathcal{F} \setminus h^{-1}(\Delta')$ . Soit  $w$  est sur le bord de  $K\mathcal{F}$ , soit  $h(w')$  existe et appartient à  $\mathbb{C} \setminus \Delta'$ . Dans ce deuxième cas,  $w'$  ne peut appartenir à  $M$ , sinon on aurait  $z \in \overset{\circ}{I}_{m+1}$ ; donc  $h(w) \in \partial \Delta'$ . Dans tous les cas,  $z \in K_L$ . Donc

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \subset K_L$$

– Tout ce qui est dans  $P_k$  s'échappe de  $K_L$  puisque  $u \notin K\mathcal{F}_j$ . Donc  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k \subset K \setminus K_L$ . Avec le point précédent, et sachant d'autre part que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k \subset \overset{\circ}{K}_L$ , on en déduit que  $K \setminus K_L \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ . On a donc démontré que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k = K \setminus K_L$$

Nous avons vu précédemment que cela implique

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = K_L$$

*Estimation de l'aire :*

Dans la suite, nous fixons  $j$ , et nous omettons cet indice.

Soit  $V_0$  le complémentaire de la composante connexe supérieure de  $K\mathcal{F}$ . Comme le module de  $\overline{M} \setminus \overline{V}_0$  est universellement minoré (proposition 2.1), la distance hyperbolique dans  $\widetilde{M}$  de  $\omega$  à  $\partial\overline{V}_0$  est universellement majorée (d'après un théorème de Grötzsch, voir [A], théorème 4.6). Soit  $b : M \rightarrow M^1$  la branche de la réciproque de  $h$  définie dans la preuve de la proposition 3.5, et  $V_1$  l'image de  $V_0$  par  $f$ . Soit  $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in [0, 1]\}$  et

$$B = R \cap (V_0 \setminus V_1)$$

( $B$  n'est pas forcément connexe). Rappelons que  $\gamma = \gamma(p/q)$  a été introduit dans la section 1.

**Lemme 3.7** *Le diamètre euclidien de  $B$  dans  $\mathbb{C}$  est majoré par une constante universelle qui ne dépend que d'une majoration de  $\operatorname{Re}(\gamma)$ .*

**Preuve** : Le diamètre horizontal de  $B$  est trivialement égal à 1. Son diamètre vertical est égal à  $\max(|\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z')|)$  pour  $z \in \partial V_0$  et  $z' \in \partial V_1 = b(\partial V_0)$ . Grâce au module universellement minoré entre  $\overline{\Delta}'$  et  $\overline{V}_0$ , on sait que  $b - T_{-t_\nu}$  est universellement majoré sur  $V_0$ , où  $t_+$ ,  $t_-$  sont comme dans la proposition 2.5. D'après cette proposition,  $\operatorname{Im}(t_\nu) = \nu 2\pi \operatorname{Re}(\gamma)$ , puisque  $t_\nu$  est réel. Il suffit donc de majorer l'extension verticale  $l$  de  $\partial V_0$ . Or  $\partial V_0 \subset J\mathcal{F}$ , et  $J\mathcal{F}$  est coïncé entre les deux cases d'échiquier  $E_{\pm\nu}$  voisinages des bouts. Ces deux cases s'envoient de façon univalente par  $h$  sur les deux demi-plans délimités par  $v + \mathbb{R}$  où  $v$  est une valeur critique de  $h$ . D'après le théorème 1/4 de Koebe,  $\sup_{z \in \partial E_+} \operatorname{Im}(z) \leq \ln(4)/2\pi + \operatorname{Im}(v) - t_+$ , et de même  $\sup_{z \in \partial E_-} \operatorname{Im}(z) \leq -\ln(4)/2\pi + \operatorname{Im}(v) - t_-$ . Donc  $l \leq 2\pi \operatorname{Re}(\gamma) + \frac{\ln(4)}{\pi}$ . ■

Puisqu'un module minoré sépare  $\overline{B}$  du bord de  $\overline{M}$ , ce lemme implique que le diamètre de  $B$  pour la métrique hyperbolique de  $M$  est universellement majoré en fonction d'une majoration de  $\operatorname{Re}(\gamma) = \operatorname{Re}(\gamma(p/q))$ . Je rappelle que la conjecture 1, affirme que la suite  $\operatorname{Re}(\gamma(p_n/q_n))$  est bornée.

Pour la propriété et la remarque suivantes, je rappelle que  $B$ ,  $G_M$  et  $P_M$  dépendent de  $p/q$ .

**Proposition 3.8** *Il existe une constante universelle  $E > 0$  telle que pour tous  $p/q$ ,*

$$E \leq \operatorname{Leb} G_M \cap B .$$

**Preuve** : Prouvons que c'est une conséquence du point 3 de la proposition 2.1. D'une part  $h^{-1}(\Delta') \setminus \Delta' \subset G_M$  est immédiat d'après la définition de  $G_M$ . D'autre part  $h(V_1) = V_0$  qui est disjoint de  $\Delta'$ , donc  $h^{-1}(\Delta') \cap V_0$  est disjoint de  $V_1$ . Donc  $h^{-1}(\Delta') \cap V_0 \subset G_M \cap (V_0 \setminus V_1)$ . D'où  $\operatorname{Leb} G_M \cap B = \operatorname{Leb} \overline{G}_M \cap (\overline{V}_0 \setminus \overline{V}_1) \geq \operatorname{Leb} \overline{h}^{-1}(\overline{\Delta}') \cap \overline{V}_0$ . ■



**Remarque :** quand  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\text{Leb } P_M \cap B = C(p_n/q_n) \rightarrow 0$$

(c'est exactement la conjecture 2)

Pour tous  $l \in \mathbb{Z}$  et  $m \in \mathbb{N}$ ,  $T_l \circ b^m$  est univalente sur  $M$  et  $B$  a un diamètre hyperbolique borné dans  $M$ , donc les ensembles  $D = T_l(b^m(B))$  ont tous un diamètre hyperbolique dans  $M$  borné, et la distorsion de  $T_l \circ b^m$  est bornée sur  $B$ , les deux bornes ne dépendant que d'une majoration de  $\text{Re}(\gamma)$ . L'ensemble des  $D$  pour  $l \in \mathbb{Z}$  et  $m \in \mathbb{N}$  forme une partition  $\mathcal{P}$  de  $V_0$ . En effet,  $\bigcup_l T_l \circ b^m(B) = b^m(V_0 \setminus V_1)$ , et  $V_0 = \bigcup_m b^m(V_0 \setminus V_1)$  se déduit de la proposition 3.5. Je rappelle que nous avons fixé une valeur de  $j$ . Nous allons maintenant considérer les  $q$  images  $\mathcal{P}_j$  de cette partition dans les  $q$  plans complexes  $\mathbb{C}_j$  par les translations du diagramme commutatif de la figure 2.1. Ceci est bien défini car  $\mathcal{P}$  est invariante par  $T_1$ .

Soit maintenant  $k \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{I}$  une composante connexe de  $\overset{\circ}{I}_k$ . Soient  $i$  et  $N(\mathcal{I})$  comme dans l'hypothèse de récurrence, et  $j = j(\mathcal{I}) = i + \nu/2$ . L'ensemble  $E$ , image univalente de  $D \in \mathcal{P}_{j(\mathcal{I})}$  dans  $\mathcal{I}$  par la réciproque de l'isomorphisme  $h_{j(i)}^{N(\mathcal{I})} \circ \phi_{*,i} : \mathcal{I} \rightarrow M$  est, d'après ce qui précède, une image de  $B$  à distorsion bornée par le réel  $d = d(\text{Re}(\gamma)) > 0$  (majorant du logarithme du quotient des dérivées en deux points de  $D$ ), la fonction  $\text{Re}(\gamma) \mapsto d$  étant croissante. Fixons  $k$  et soit  $\mathcal{Q}_k$  l'ensemble de toutes ces images  $E$ , pour  $\mathcal{I}$  variant parmi les composantes connexes de  $\overset{\circ}{I}_k$  et  $D$  variant dans  $\mathcal{P}_{j(\mathcal{I})}$ . Comme  $P_M \subset V_0$ , on en déduit que l'ensemble des  $E \cap P_{k+1}$ , pour  $E \in \mathcal{Q}_k$ , forme une partition de  $P_{k+1}$ . Comme  $G_M \not\subset V_0$ , l'ensemble des  $E \cap G_{k+1}$ , pour  $E \in \mathcal{Q}_k$ , forme une partition, non pas de  $G_{k+1}$ , mais d'un sous-ensemble de  $G_{k+1}$ . D'autre part, pour tout  $E \in \mathcal{Q}_k$ , la partition de  $E$  selon  $(E \cap G_{k+1}, E \cap P_{k+1}, E \cap I_{k+1})$  est image à distorsion bornée par  $d$  de la partition de  $B$  par  $(B \cap G_M, B \cap P_M, B \cap I_M)$ .

Ceci permet la majoration

$$\frac{\text{Leb}(P_{k+1})}{\text{Leb}(G_{k+1})} \leq \Lambda(p/q)$$

avec

$$\Lambda(p/q) = \frac{C}{E} e^{2d}$$

et  $C = C(p/q) = \text{Leb}(R \cap (\mathbb{C} \setminus K\mathcal{F}))$  introduite précédemment,  $d = d(\text{Re}(\gamma(p/q)))$ , et  $E$  est la constante universelle introduite dans la proposition 3.8. D'après les conjectures 1 et 2,  $\Lambda(p_n/q_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Q.E.D.

## 4. Expériences numériques

Les expériences numériques suivantes, dessins ou graphes, illustrent les deux conjectures et l'une des hypothèses. Elles suggèrent même des résultats plus forts.

1.

Voici des dessins qui semblent conforter la conjecture 2, dans le cas particulier où  $\theta = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2 - o_r$  :

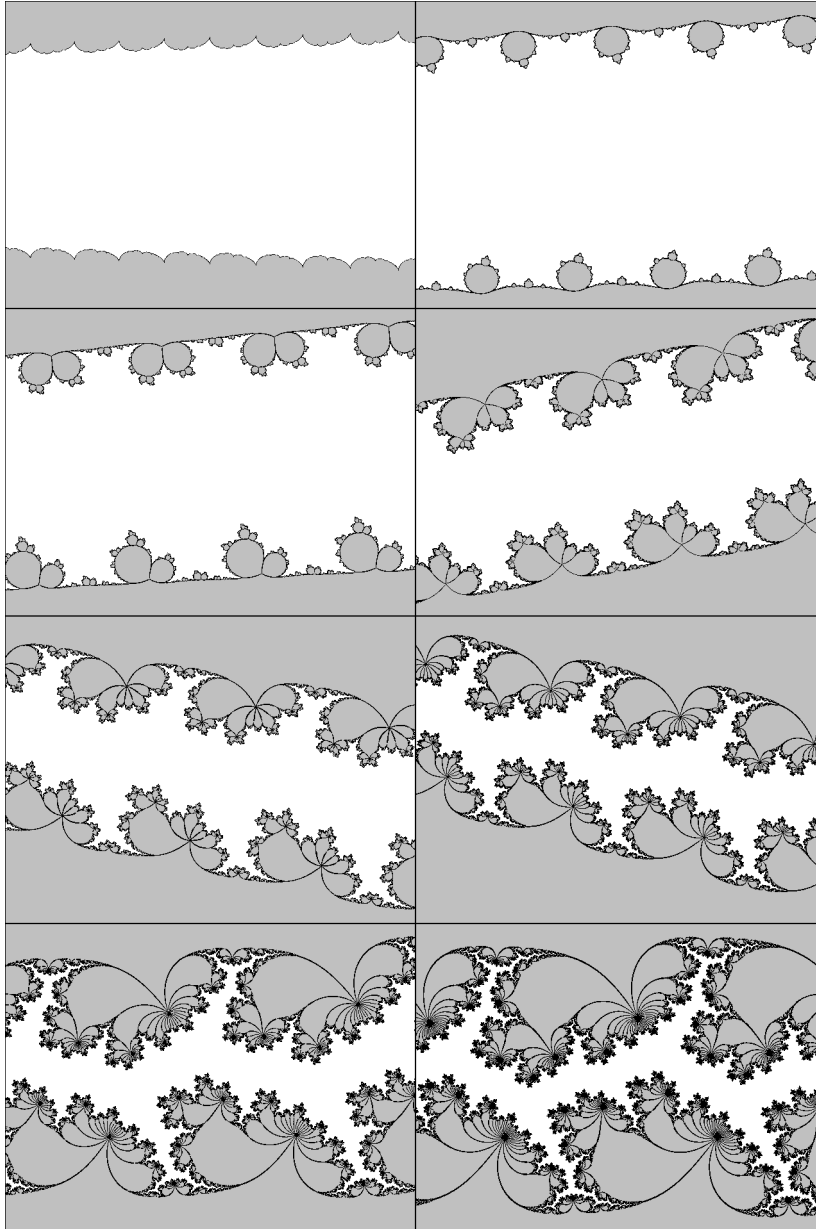


FIG. 4.1 – Ensembles de Julia  $P_{p_n}/q_n$  dans les cylindres d'Écalle pour les premières réduites de l'opposé du nombre d'or.

2.

Cette expérience numérique a été réalisée avec Maple. Elle est en accord avec la conjecture 1, puisqu'il semble qu'en fait  $\operatorname{Re}(\gamma(p/q)) \leq 1$  pour tout  $p/q$ , et fait apparaître un croissant insoupçonné. En examinant avec ces mêmes données la valeur des coefficients  $A_{p/q}$ , il semble même que  $\operatorname{Re}(A_{p/q}) \geq 0$ , ce qui implique le résultat plus fort  $\operatorname{Re}(\gamma_{p/q}) \leq \frac{q+1}{2q}$ .

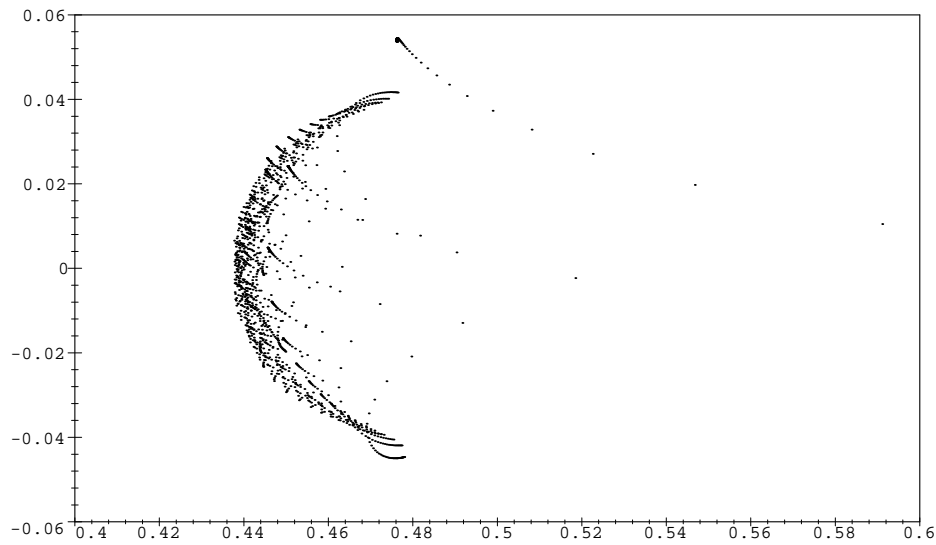


FIG. 4.2 – Valeurs complexes de  $\gamma(p/q)$  pour tous les couples  $(p, q)$  avec  $3 \leq q \leq 100$  et  $0 < p/q < 1/2$  (les valeurs complexes pour  $< p/q < 1$  étant les conjuguées complexes de celles-là) ;  $\gamma(0/1) = 1$  et  $\gamma(1/2) = 11/16$ .

3.

Si l'hypothèse 4 était fausse, les bords des disques de Siegel correspondant seraient de plus en plus dentelés, ce qui ne semble pas être le cas sur les dessins, qui suggèrent même une convergence uniforme (figure 4.4). Les valeurs de  $\theta$  correspondant aux quatre dessins de la figure 4.3 sont respectivement :

$$\theta = [0, 10000, 1, 1, 1, \dots],$$

$$\theta = [0, 1, 1, 1, 10000, 1, 1, 1, \dots],$$

$$\theta = [0, 1, 1, 1, 1, 10000, 1, 1, 1, \dots],$$

$$\theta = [0, 1, 1, 1, 1, 1, 10000, 1, 1, 1, \dots].$$

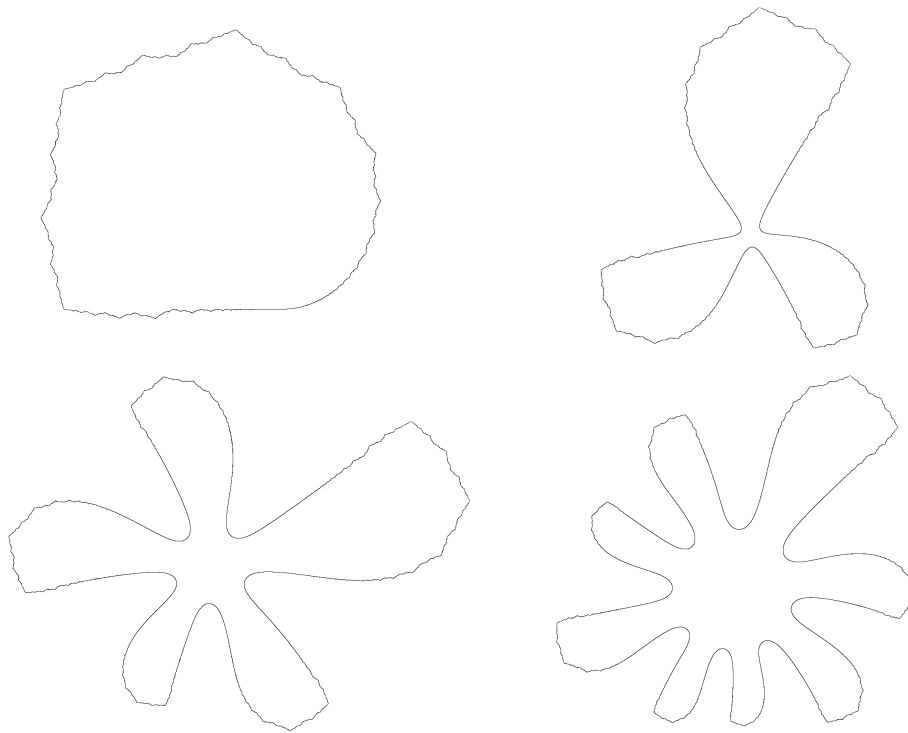


FIG. 4.3 – Quelques disques de Siegel (bords).

La figure 4.4 montre une superposition des bords des disques de Siegel pour  $\theta$  valant  $[2, 1, 4, k, 1, 1, 1, \dots]$ ,  $k = 500, 10000, 200000, 4000000$ , et un agrandissement de la même chose pour  $k = 1, 5, 25, 100, 500, 10000$ .

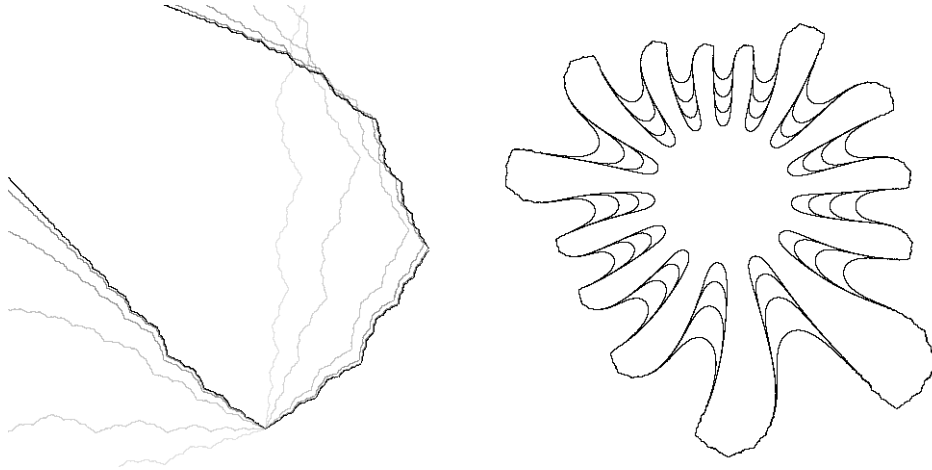


FIG. 4.4 – Convergence des disques de Siegel.

# Bibliographie





## Bibliographie

- [ADU] J. Aaronson, M. Denker, M. Urbanski. *Ergodic theory for Markov fibred systems and parabolic rational maps*. Transcriptions of the American Mathematical Society, Vol. 337, n°2, 1993.
- [A] L.V. Ahlfors. *Conformal Invariants : Topics in Geometric Function Theory*. McGraw-Hill, 1973.
- [A2] L. V. Ahlfors. *Lectures on quasiconformal mappings*. Van Nostrand, 1966.
- [AB] L. V. Ahlfors, A. Beurling. *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*. Acta Mathematica, Vol. 96, 1956.
- [BE] X. Buff, A.L. Epstein. *A parabolic Yoccoz inequality*. Prépublications de l'université de Toulouse III, 209, France, 2001.
- [BS] S. Bulet, P. Sentenac. *Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 115, no. 3, pp. 451–481, Cambridge University Press, 1994.
- [CG] L. Carleson, T.W. Gamelin. *Complex Dynamics*. Universitext, Springer, 1992.
- [C1b] A. Chéritat. *Estimates on the speed of explosion of the parabolic fixed points of quadratic polynomials and applications*. Prépublication de l'université Paris-sud, 99-77, France, 1999.
- [D] A. Douady. *Does a Julia Set Depend Continuously on the Polynomial?* In : “Complex dynamical Systems, The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets”, R.L. Devaney, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 49, American Mathematical Society, 1994.
- [DU] M. Denker, M. Urbański. *Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent periodic point*. Journal of the London Mathematical Society, Vol. 43, 1991.
- [DH] A. Douady, J.H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publications mathématiques d'Orsay, France, 1984-85.
- [DH2] A. Douady, J.H. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 4<sup>e</sup> série, tome 18, France, 1985.
- [H] J.H. Hubbard. *Local Connectivity of Julia Sets and Bifurcation Loci : Three Theorems of Yoccoz*. In : “Topological Methods in Modern Ma-

- thematics : a symposium in honor of John Milnor's sixtieth birthday", L.R. Goldberg, J. Milnor, A.V. Phillips, *Publish or Perish*, 1993.
- [He] M. Herman. *Conjugaison quasi-symétrique des difféomorphismes du cercle et applications aux disques singuliers de Siegel*. Manuscrit, 1986.
- [J] H. Jellouli. *Sur la densité intrinsèque pour la mesure de Lebesgue et quelques problèmes de dynamique holomorphe*. Thèse, Université Paris-Sud, France, 1994.
- [L] P. Lavaurs. *Systèmes dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques*. Thèse, Université Paris-Sud, France, 1989.
- [MM] C.T. Mac Mullen. *Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets*. Acta Mathematica, Vol. 180, 1998.
- [dMvS] W. de Melo, S. van Strien. *One-Dimensional Dynamics*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge · Band 25, Springer-Verlag, 1993.
- [M] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable : Introductory Lectures*. IMS Preprint, ims90-5, 1990.
- [N] V.A Naïshul'. *Topological invariants of analytic and area-preserving mappings, and their application to analytic differential equations in  $\mathbb{C}^2$  and  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* . Transactions of the Moscow Mathematical Society, 1983, Issue 2.
- [O] R. Oudkerk. *The Parabolic Implosion for  $f_0(z) = z + z^{b+1} + \mathcal{O}(z^{\nu+2})$* . Thèse, University of Warwick, UK, 1999.
- [PM1] R. Pérez-Marco. *Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe*. Séminaire Bourbaki, Vol. 753, février 1992.
- [PM2] R. Pérez-Marco. *Fixed points and circle maps*. Acta Mathematica, Vol. 179, 1997.
- [Pm] R. Pérez Marco. *Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V.I. Arnold*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, IV, Série 26, n. 5, France, 1993.
- [Pe1] C.L. Petersen. *Local Connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation*. Acta Mathematica, Vol. 177, 1996.
- [Pe2] C.L. Petersen. *The Herman-Świątek Theorem with applications*. London Mathematical Society Lecture Note Series 274 : "The Mandelbrot Set, Theme and Variations", Tan Lei, Cambridge University Press, 2000.
- [P] C. Pommerenke. *Univalent functions*. Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher, Band XXV. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [R] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1966.

- [S] M. Shishikura. *Bifurcation of parabolic fixed points*. In : “The Mandelbrot Set, Theme and Variations”, L. Tan, London Mathematical Society Lecture Note Series n. 274, *Cambridge University Press*, 2000.
- [Sw] G. Świątek. *On critical circle homeomorphisms*. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática (Nova Série)* 29, no. 2, 1998.
- [T] L. Tan. *Local properties of the Mandelbrot set at parabolic points*. In : “The Mandelbrot Set, Theme and Variations”, L. Tan, London Mathematical Society Lecture Note Series n. 274, *Cambridge University Press*, 2000.
- [V] J. Väisälä. *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 229, *Springer Verlag*, 1971.
- [Ya] M. Yampolski. *Complex bounds for renormalization of critical circle maps*. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. 191, 1999.
- [YaZ] M. Yampolsky, S. Zakeri. *Mating Siegel quadratic polynomials*. IMS preprint, IMS 98-8, 1998.
- [Y] J.C. Yoccoz. *Petits diviseurs en dimension 1*. *Astérisque*, Vol. 231, *Société Mathématique de France*, 1995.



## Illustrations supplémentaires



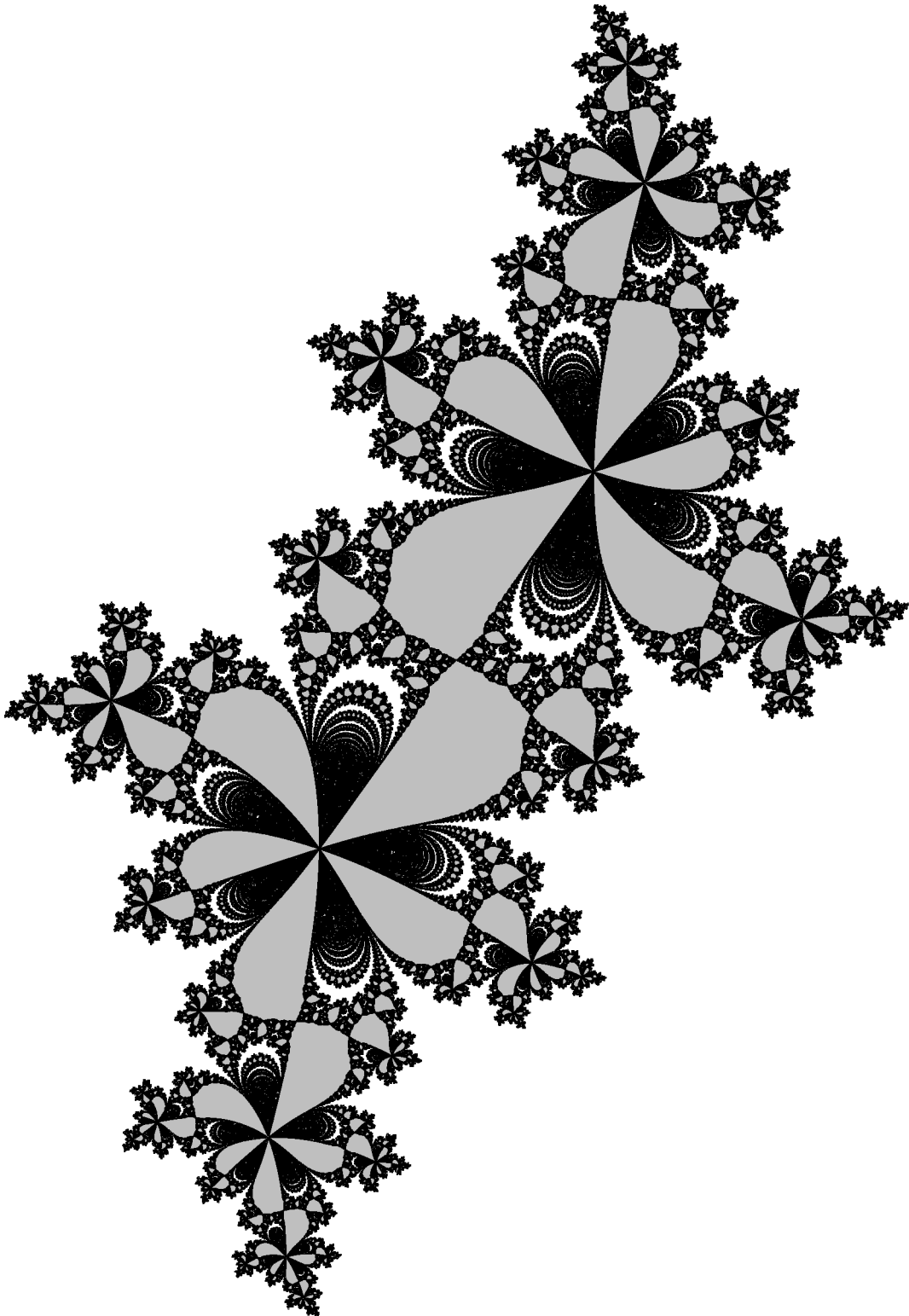


FIG. 4.5 – (tournée de  $90^\circ$ ) Ensemble de Julia-Lavaurs de  $P_{2/5}$ , pour  $b = +1$  et  $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$  (le nombre d'or) : l'intérieur de  $K_L$  est en gris et  $J_L$  en noir. Le point fixe se trouve en haut à gauche, à l'intersection des cinq pétales.

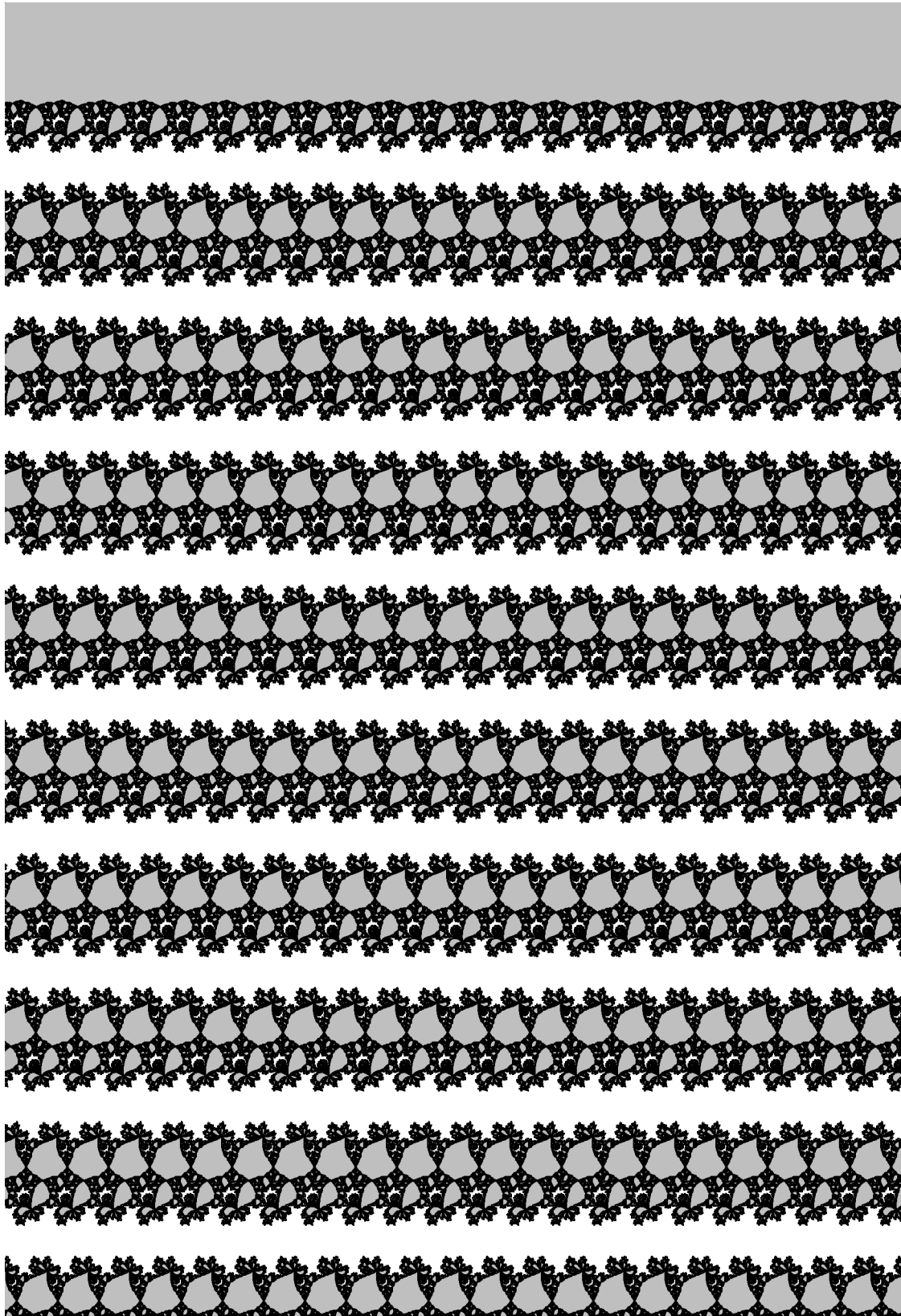


FIG. 4.6 – Le même dessin vu en coordonnées de Fatou (préimage par  $\psi_+$ ) : l'intérieur de  $K_L\mathcal{F}$  est en gris et  $J_L\mathcal{F}$  est en noir.



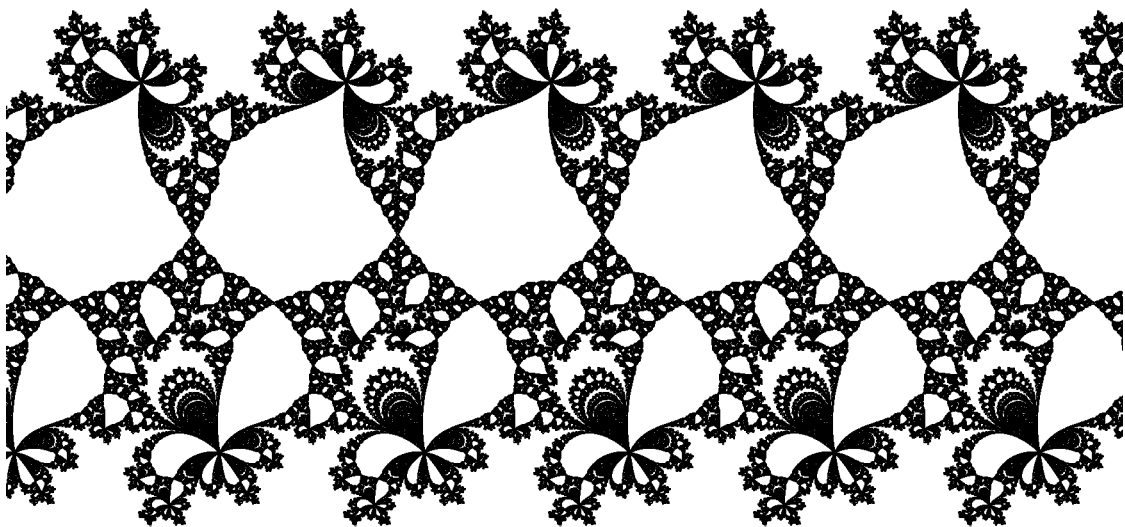
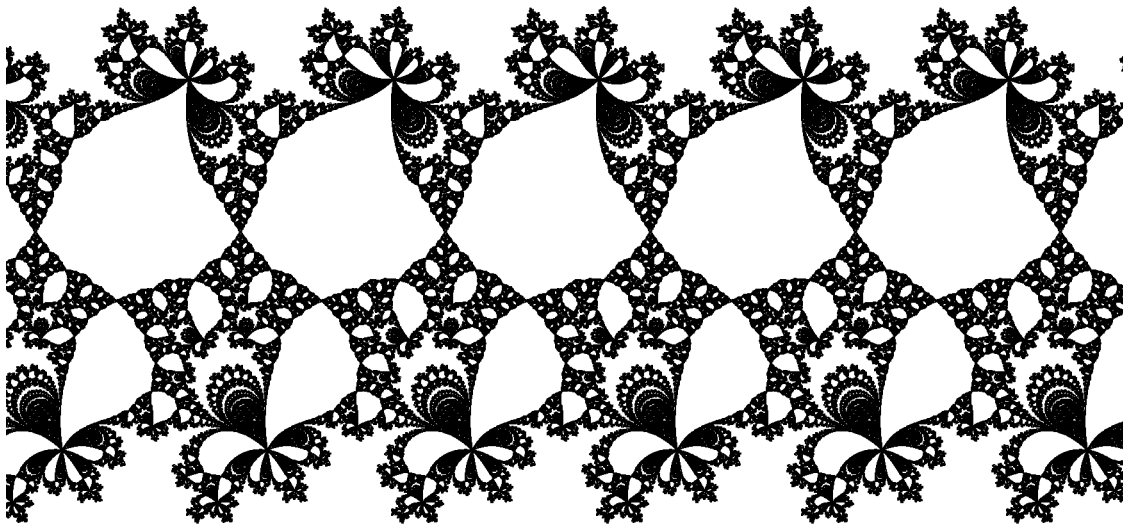
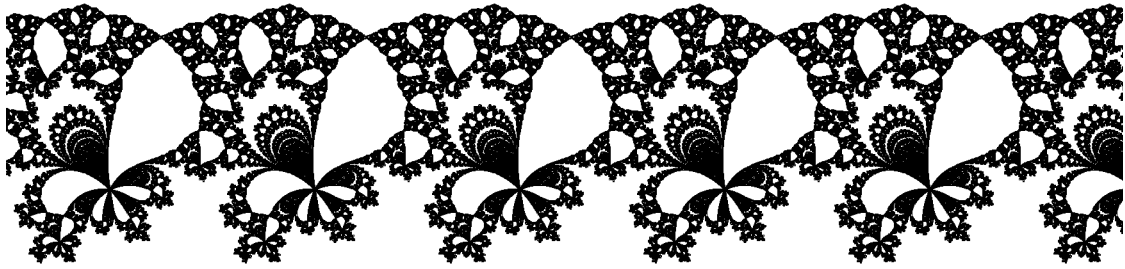


FIG. 4.7 – Agrandissement sur  $J_L\mathcal{F}$  dans le dessin précédent.

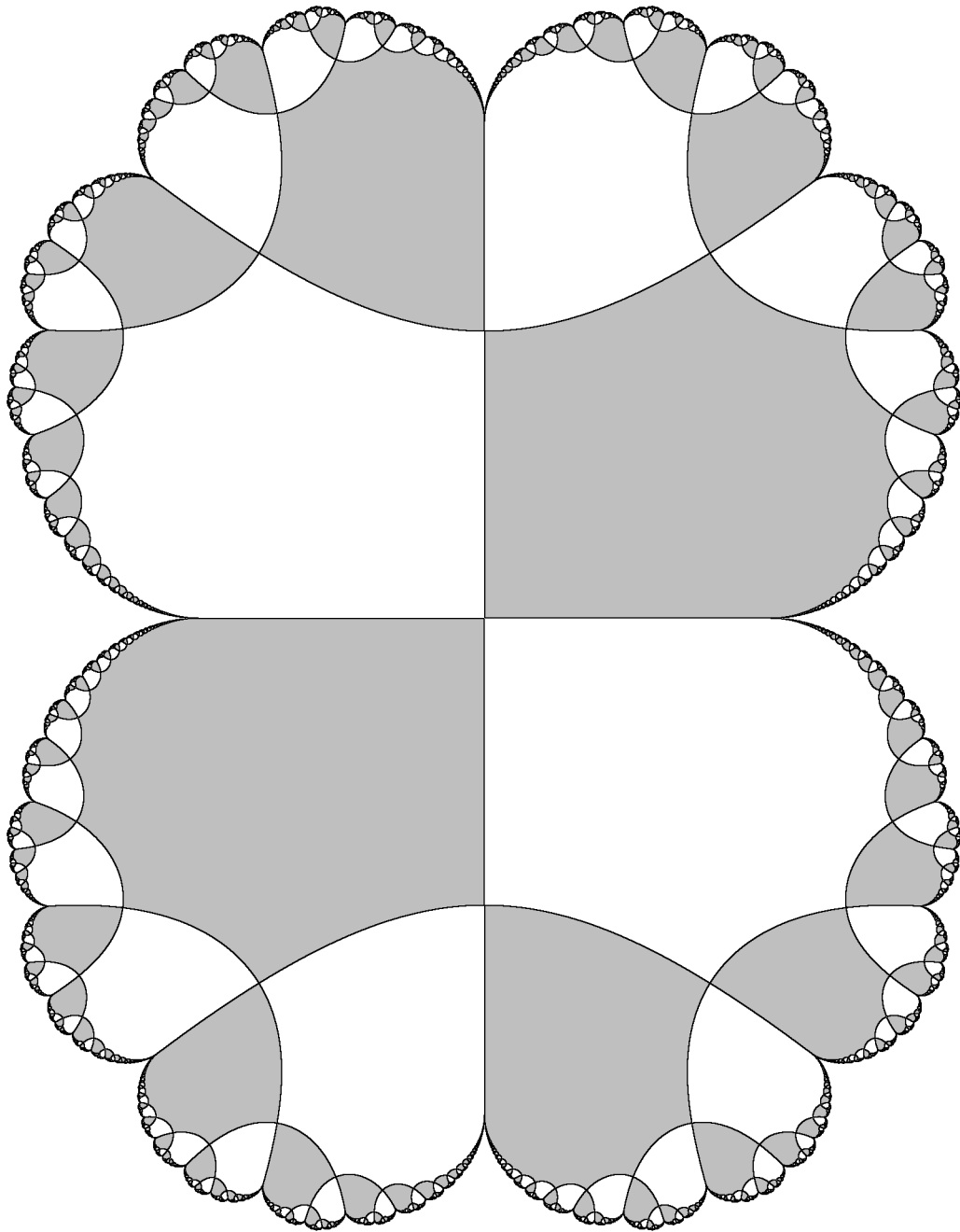


FIG. 4.8 – Échiquier parabolique du chou-fleur. Le point parabolique est la pointe située à droite.

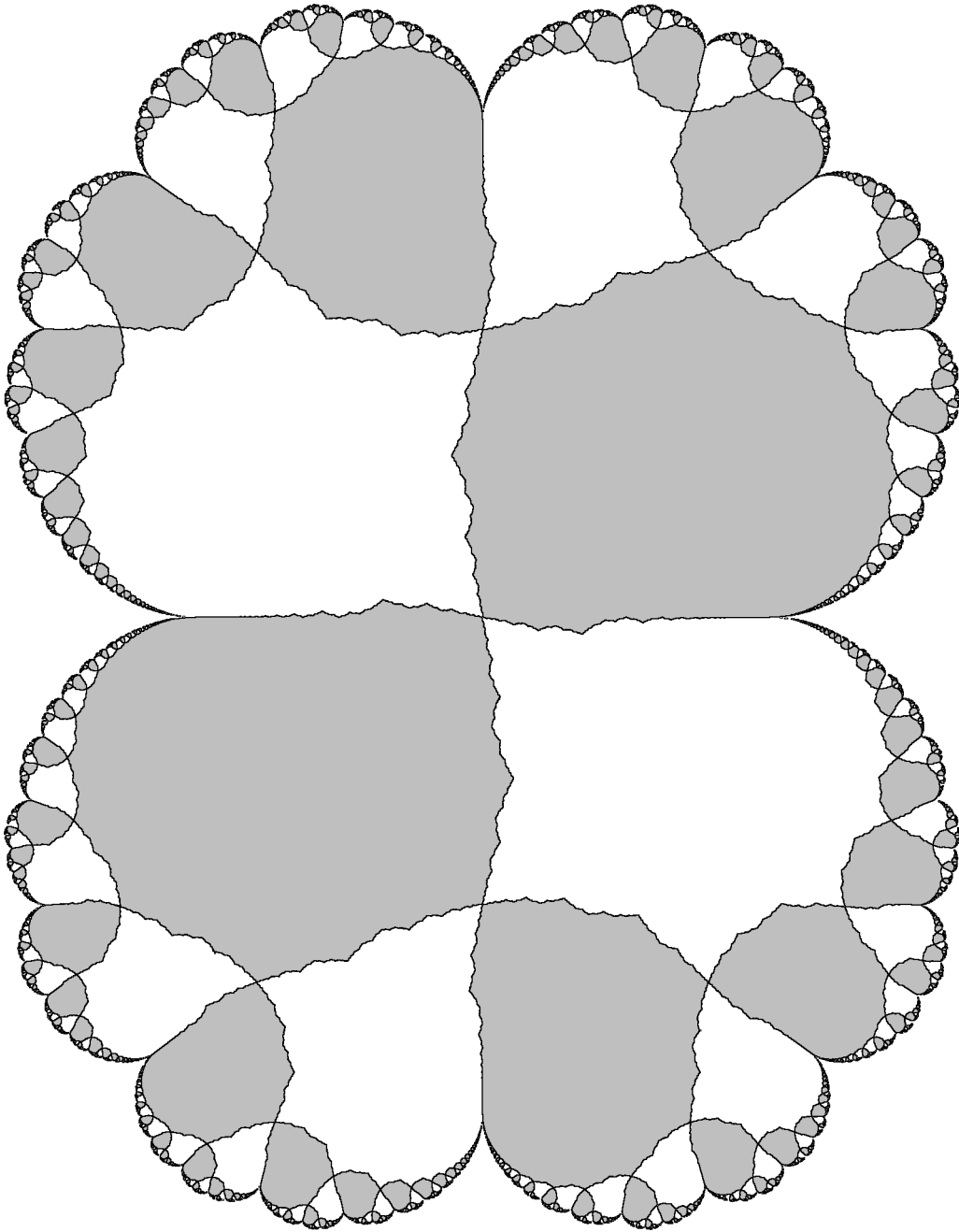


FIG. 4.9 – Image de l'échiquier par l'application quasiconforme  $s$ , pour  $b = +1$  et  $\omega =$  le nombre d'or : les composantes grises sont le disque de Siegel virtuel  $\Delta$  de  $g$  (celle des deux plus grandes composantes qui adhère au point fixe), ainsi que les composantes de  $g^{-1}(\Delta)$  où  $g$  est l'application de Lavaurs.

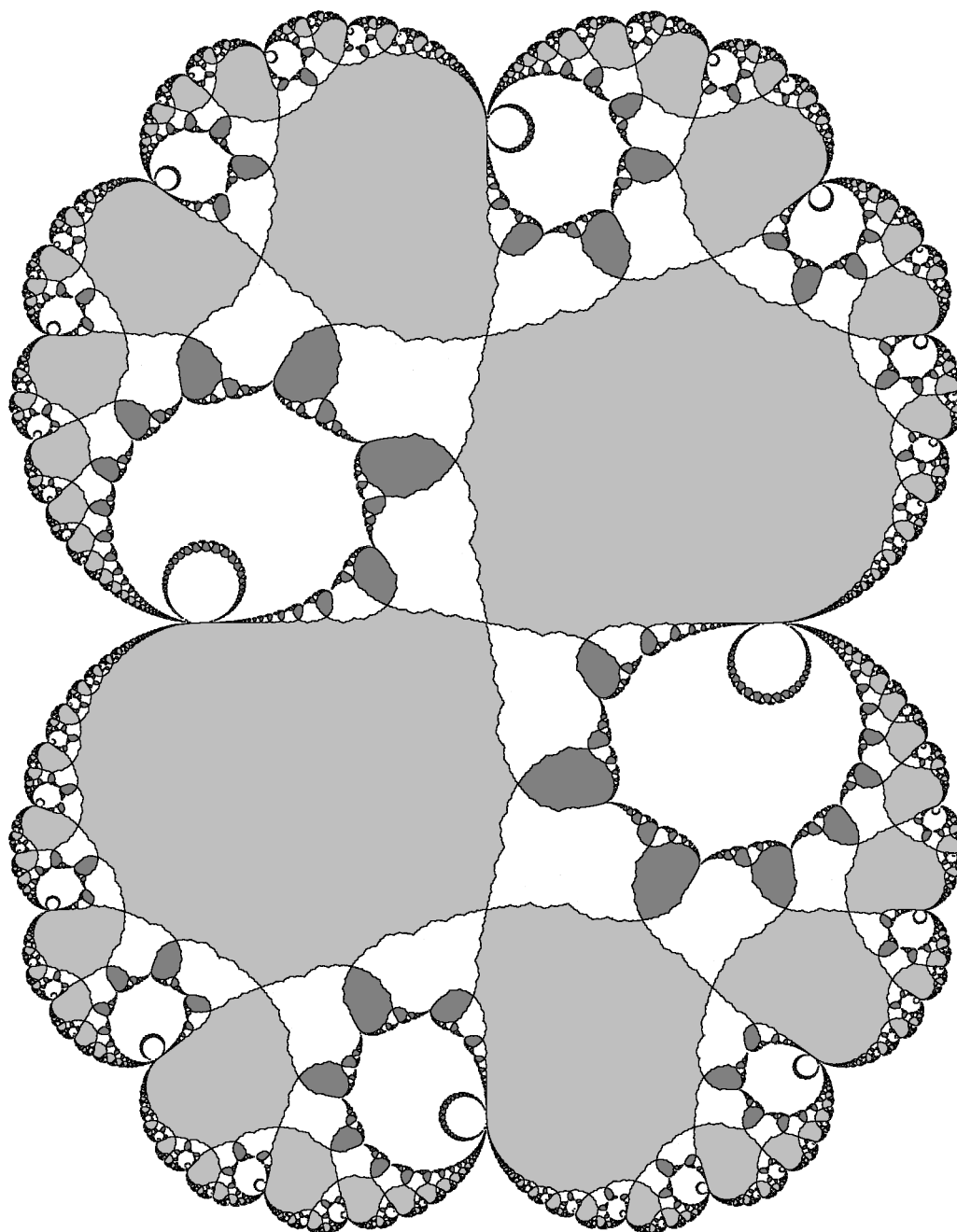


FIG. 4.10 – Image précédente complétée par  $g^{-2}(\Delta)$  en gris plus foncé.

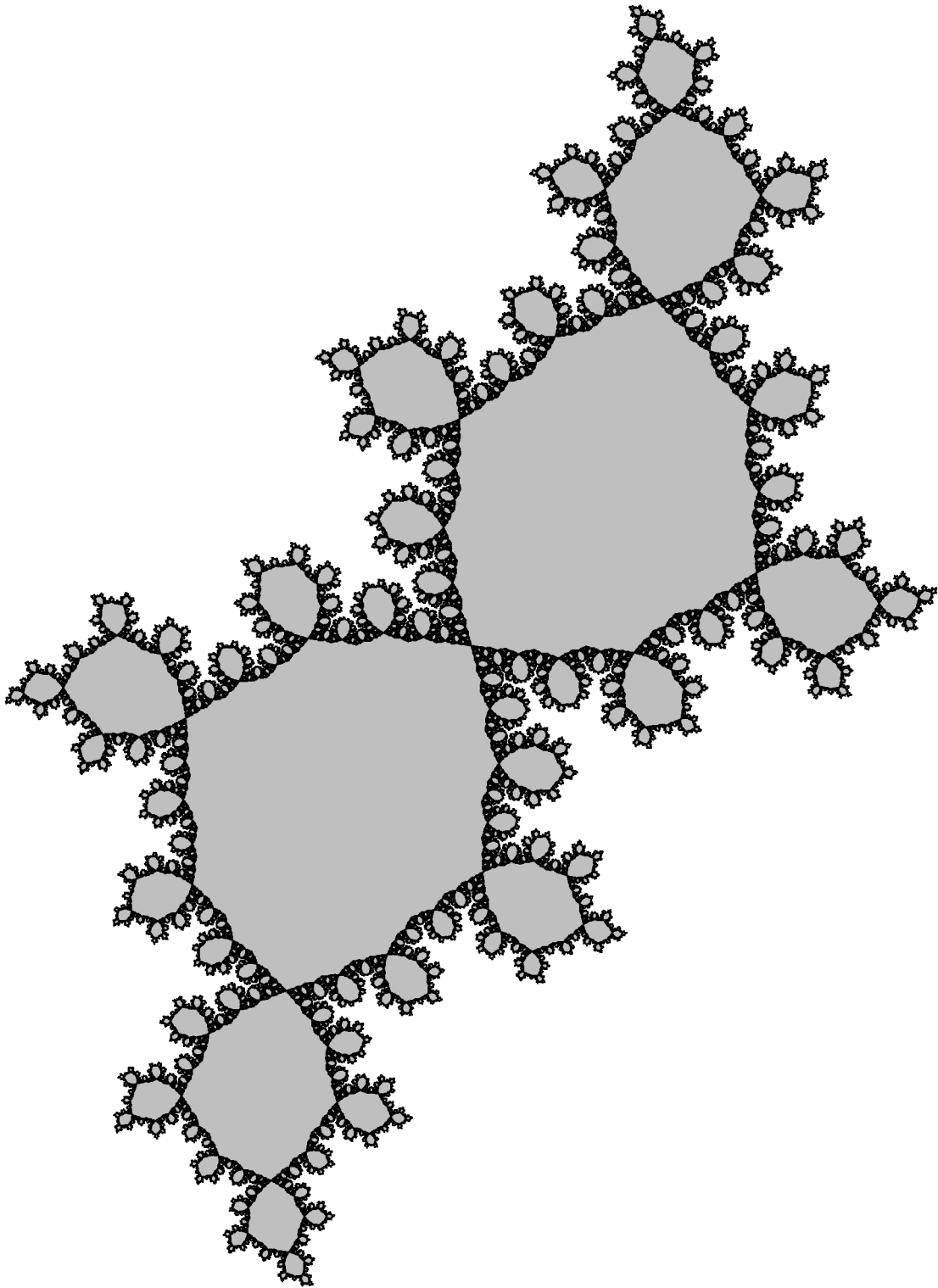


FIG. 4.11 – (tournée de  $90^\circ$ ) Ensemble de Julia pour  $\theta = \theta_0 = [0, 2, 1, 1, 1, \dots]$ . L'opposé de ce nombre est égal au nombre d'or modulo  $\mathbb{Z}$ . Les premières réduites de  $\theta_0$  sont  $0/1, 1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21, 13/34, 21/55, \dots$

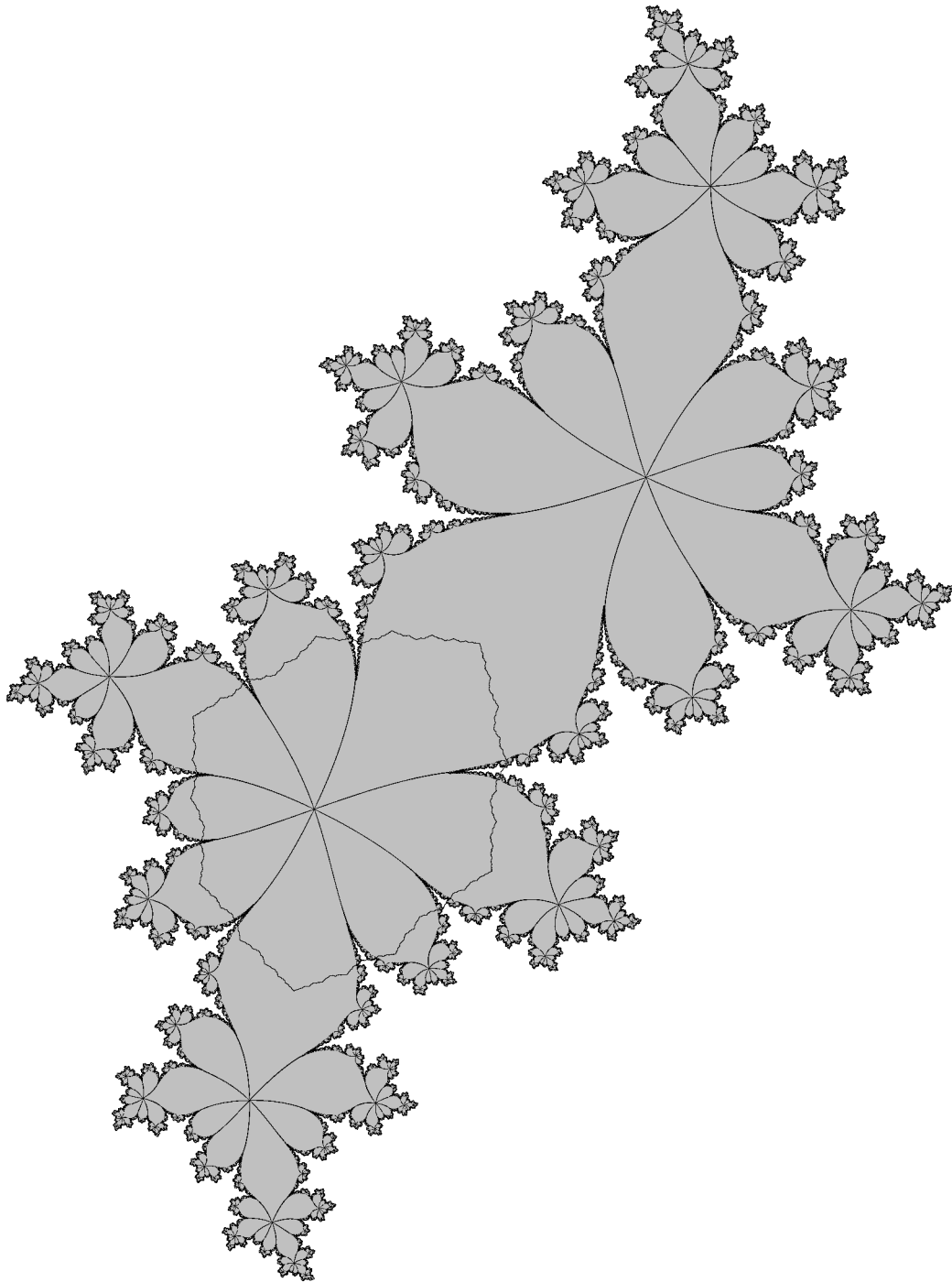


FIG. 4.12 – (tournée de  $90^\circ$ ) Superposition de l'ensemble de Julia pour  $p/q = 3/8$  et du bord du disque de Siegel pour  $\theta = \theta_0$ .

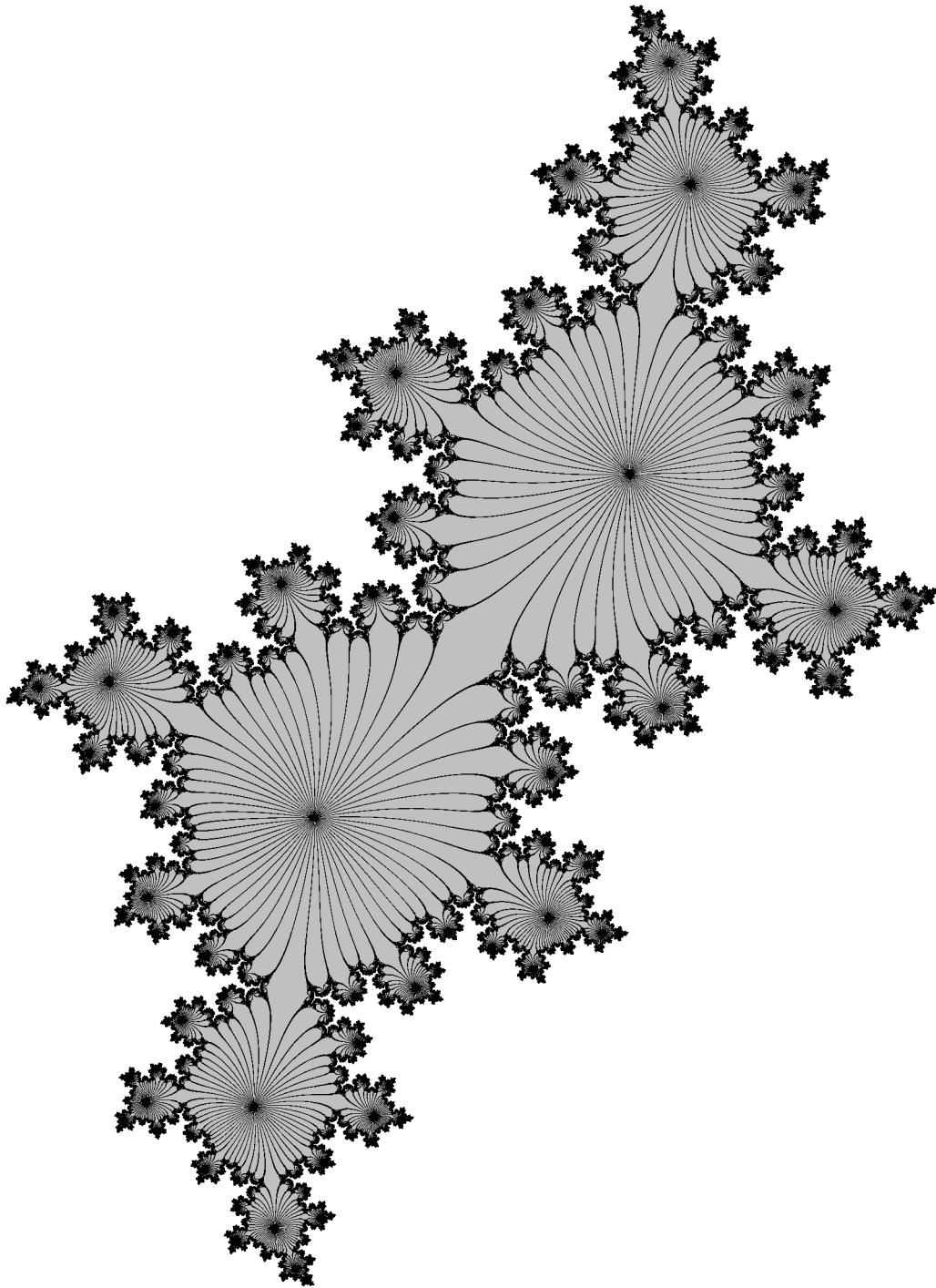


FIG. 4.13 – (tournée de  $90^\circ$ ) Ensemble de Julia pour  $p/q = 21/55$ .

# Errata pour la thèse.

Dernière mise à jour : 19 juillet 2002.

Cet errata est évolutif. Il est mis à jour à chaque erreur qui m'est reportée ou que je découvre. Les erreurs importantes, c'est à dire celles qui vont au delà des fautes de frappes, font l'objet d'addenda.

À ce jour, il y a une erreur importante, corrigée dans l'addendum numéro 1 (bientôt prêt).

## Partie I

- Page 6, au lieu de  $f'(0) = z^{i2\pi\theta}$ , lire  $f'(0) = e^{i2\pi\theta}$
- Page 6, proposition 1.2, au lieu de

$$\forall z \text{ tel que } f^n(z) \xrightarrow{\neq} 0, |f^n(z)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L_a}{n^{1/r}}$$

lire

$$\forall z \text{ tel que } f^n(z) \xrightarrow{\neq} 0, |f^{qn}(z)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L_a}{n^{1/r}}$$

- Page 40, la preuve du lemme 5.4 est fautive, ce qui remet en question le lemme 5.5 et son corollaire 5.6 qui suivent. En m'inspirant du travail de Rohde et Zinsmeister, je prouve un énoncé analogue au corollaire 5.6 qui suffit à l'utilisation qui en est faite dans la thèse. Ce sera l'objet de l'addendum numéro 1 (bientôt prêt). Notons que Xavier Buff a une approche différente et très élégante pour prouver un lemme plus fort que le lemme 5.5, ce qui sauve ce lemme ainsi que son corollaire 5.6.
- Page 44, lemme 5.8, au lieu de "foliations", lire "feuilletages".
- Page 103, proposition 2.23, au lieu de

$$t_+ - t_- = -i2\pi\gamma + \frac{s}{q}$$

lire

$$t_+ - t_- = -i2\pi\gamma + \frac{\nu s}{q}$$

## Partie II

- Page 69, remarque suivant le théorème 2, remplacer  $\text{Im}(z) > \frac{1}{2\pi}(\Phi(\alpha) + C_0 + \ln(4))$  par  $\text{Im}(z) > \Phi(\alpha) + C_0 + \frac{\ln 4}{2\pi}$



# Cage de Faraday

Version du 26 juillet 2002.

Avertissement : cet article n'a pas un statut fixe et est susceptible d'évoluer à tout moment.

## I. Introduction

### Motivation

Dans ma thèse [C], la preuve du lemme 5.4 est fautive (page 40, partie I, section 5 : “Application à une nouvelle preuve du théorème de Yoccoz”). Cela remet en question le lemme 5.5 et son corollaire 5.6 qui suivent.

Je donne ici un énoncé analogue au corollaire 5.6 qui suffit à l'utilisation qui en est faite dans ma thèse, ainsi qu'une preuve inspirée du travail de Rohde et Zinsmeister [RZ].

Notons que Xavier Buff a trouvé une preuve très élégante d'un énoncé plus fort que le lemme 5.5, ce qui sauve ce dernier ainsi que son corollaire 5.6.

### Situation du problème

Dans [C], nous composons une suite de revêtements universels  $\phi_n : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D} \setminus X_n, 0)$  où  $X_n$  est un ensemble fini de points non nuls. La dérivée en 0 de la composée  $\phi_n \circ \dots \circ \phi_0$  est de valeur absolue décroissante en fonction de 0, et nous cherchons à prouver qu'elle tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Nous disposons pour cela d'informations sur la suite  $X_n$  :  $X_n$  est l'image par une certaine fonction  $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  fixant 0 de l'ensemble  $r_n \mathbb{U}_{q_n}$  où  $r_n \in ]0, 1[$ ,  $q_n \in \mathbb{N}^*$ , et  $\mathbb{U}_q$  désigne l'ensemble des racines  $q$ -ièmes de l'unité. De plus, nous savons que  $\prod r_n \rightarrow 0$  et que la distance hyperbolique dans  $\mathbb{D}$  de  $r_n$  à  $r_n \exp(i2\pi/q_n)$  tend vers 0. Ces conditions sont-elles suffisantes ?

Dans cet addendum, nous ne retiendrons que le fait qu'il existe une constante  $d > 0$  tel que pour tout  $\mathbb{N}$ ,  $X_n$  est une chaîne cyclique de points de  $\mathbb{D}$ , chacun situé à distance hyperbolique  $\leq d$  du suivant, faisant le tour de 0 au moins une fois, et tous à distance euclidienne  $\geq 1 - r_n$  du bord de  $\mathbb{D}$ . Nous obtenons alors une majoration du type

$$\ln |\phi'(0)| < \frac{\ln r_n}{K(d)} (< 0)$$

pour une certaine constante  $K(d) > 0$  dépendant de  $d$ .

Note : dans le même temps que le présent travail, Xavier Buff a démontré que sous la condition originelle  $X_n = f(r_n \mathbb{U}_{q_n})$ , alors

$$|\phi'_n(0)| < |\psi'_n(0)|$$

où  $\psi_n$  est le revêtement universel  $(\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D} \setminus r_n \mathbb{U}_{q_n}, 0)$ , or il est relativement facile d'obtenir une majoration du type  $\ln |\psi'_n(0)| < \frac{\ln r_n}{K'(d)}$  (voir les calculs effectués dans [C], partie I, section 6.5, pages 60 et 61, montrant une majoration), ce qui est suffisant. De plus,  $K'(d) \rightarrow 1$  quand  $d \rightarrow 0$ .

## Heuristique

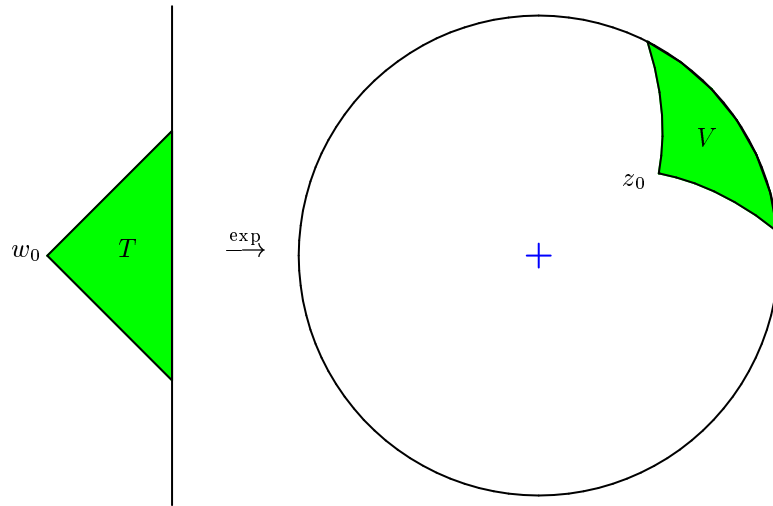
Prenons le disque  $\mathbb{D}$  et retirons-lui un seul point :  $X = \{z\}$ . On peut calculer explicitement le rayon conforme  $r$  (voir [C]) de  $\mathbb{D} \setminus X$ . Notons  $\varepsilon = 1 - |z|$ , et faisons tendre  $|z|$  vers 1. Alors  $r = 1 - \varepsilon^2/6 + O(\varepsilon^3)$ . Ainsi la contribution d'un point proche du bord du disque est de l'ordre du carré de la distance au bord. Si maintenant, on prend pour  $X$  la composante contenant 0 du disque privé de la géodésique passant par  $z$  et orthogonale à  $[0z]$ , alors  $r = 1 - \varepsilon^2/2 + O(\varepsilon^3)$ . Ainsi la chute de rayon conforme est du même ordre de grandeur que pour le point isolé. Dans le second cas, c'est également l'ordre de grandeur de l'aire de la partie retirée. Notons momentanément  $H(z)$  la région retirée.

Si on retire une couronne concentrique, la perte est également de l'ordre de l'aire retirée. Si on retire une suite finie de points régulièrement répartie sur un cercle concentrique, tels que la distance entre deux points consécutifs est de l'ordre de la distance au bord, la perte de rayon conforme sera de l'ordre de cette distance (voir [C], partie I, section 6.5), donc de l'ordre de l'aire de la réunion des régions  $P(z)$ .

Si on retire un nuage de points très proches d'un même point  $z \in \mathbb{D}$ , alors d'une part le rayon conforme est quasiment le même qu'en retirant le seul point, d'autre part les régions  $P(z)$  se superposent, et donc à nouveau l'aire de leur réunion et la perte de rayon conforme sont commensurables.

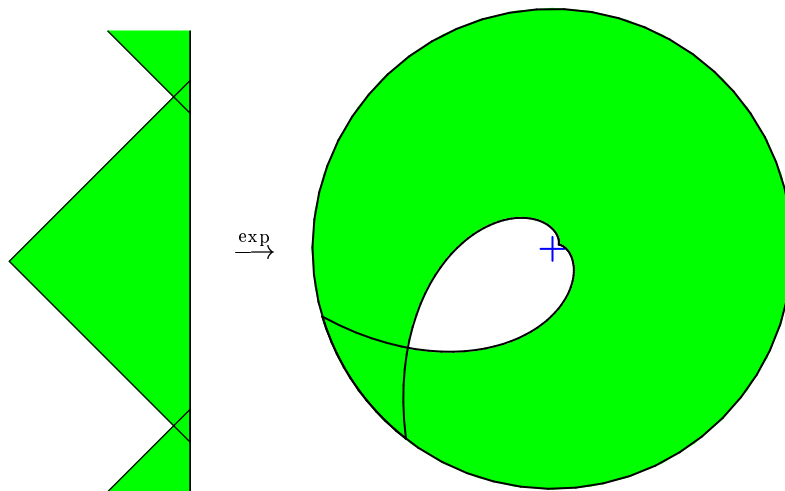
Est-ce vrai plus généralement ? C'est l'objet de la proposition 2 de cet article. Notons que pour des raisons pratiques, la forme des régions retirées y diffère.

## II. Rayon conforme des grands ouverts du disque



Pour  $z_0 \in \mathbb{D}$  non nul, soit  $w_0$  une quelconque préimage par l'application exponentielle, et considérons le triangle  $T$ , intersection du demi-plan " $\text{Im}(w) \leq 0$ " et du secteur d'équation  $|\text{Arg}(w - w_0)| \leq \pi/4$ , sommet compris (triangle équilatéral isocèle d'hypoténuse posée sur l'axe imaginaire et de sommet droit placé en  $w_0$ ). Soit  $V(z_0) = \exp(T)$ .

Notons que le domaine  $V(z)$  s'auto-intersecte si  $|z| \leq e^{-\pi}$ . Ce ne sera pas un problème, d'autant plus que les points  $z$  qui nous intéresseront seront proches du bord du disque.



Remarquons également que le choix d'un triangle en coordonnées logarithmiques

est arbitraire, et qu'il y a d'autres formes et conventions qui conviendraient pour ce qui va suivre.

Avant d'énoncer la proposition 2, intéressons nous d'abord à un cas simple.

**Lemme 1 (contribution d'un point)** *Si  $u > 0$ ,  $x = e^{-u}$ ,  $U = \mathbb{D} \setminus \{x\}$ , et  $r$  est le rayon conforme associé à  $U$ , alors*

$$r = \frac{u}{\sinh(u)}$$

Quand  $u \rightarrow 0$ ,

$$r = 1 - \frac{u^2}{6} + O(u^3)$$

pour tout  $u \in ]0, \pi]$ ,  $-\ln(r)/u^2 \in [K_1, 1/6]$ , avec  $K_1 > 0.13$ .

Voir ma thèse ([C]) pour les deux premières affirmations. La troisième est élémentaire.

Soit  $u > 0$ ,  $x = \exp(-u)$ ,  $r$  le rayon conforme de  $\mathbb{D} \setminus \{x\}$ , et  $a = 1/2\pi \times$  l'aire de  $T(-u)$  dans le quotient  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ . On calcule explicitement que  $r = \frac{u}{\sinh(u)}$ , que  $a = u^2/2\pi$  si  $u \in ]0, \pi]$ ,  $a = u - \pi/2$  si  $u \in [\pi, +\infty[$ , et une étude de fonction montre alors que le quotient  $\frac{|\ln r|}{a/2\pi}$  est toujours compris entre 0.75 et 1.05.

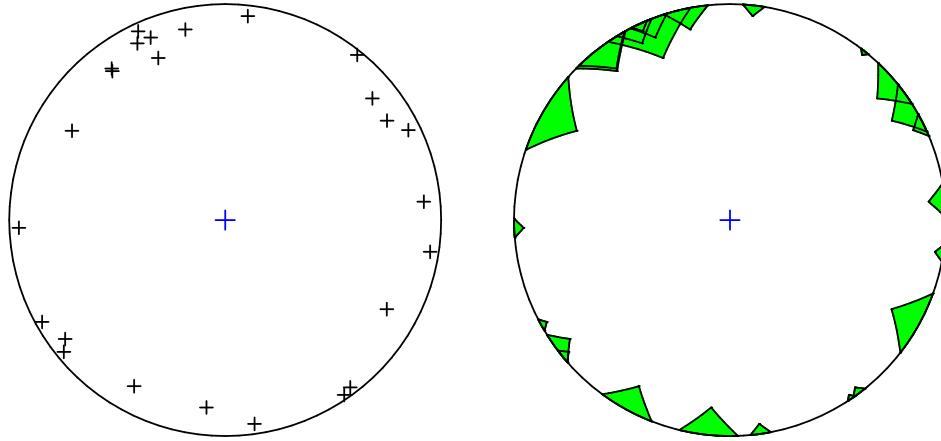


Figure : illustration de la proposition 2. Le domaine  $\mathbb{D}$  privé des points est approximé par  $\mathbb{D}$  privé des "triangles" issus de ces points. L'aire de la réunion des triangles pleins, divisée par  $2\pi$ , est de l'ordre de  $1 - r$

La proposition suivante généralise un résultat de Rohde et Zinsmeister ([RZ]).

**Proposition 2** *Il existe des constantes  $K' > K > 0$  telles que pour tout ouvert  $U$  inclus dans  $\mathbb{D}$  et contenant 0, notons  $r$  le rayon conforme en 0 du revêtement*

universel de  $U$ ,  $A = \bigcup_{e^w \in \mathbb{D} \setminus U} T(w)$  et  $a = \text{aire}(A)/2\pi$  mesurée dans le quotient  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ . Alors

$$-K'.a \leq \ln r \leq -K.a$$

De façon équivalente, (si  $U \neq \mathbb{D}$ )

$$K \leq \frac{|\ln r|}{a} \leq K'$$

Seule la majoration de  $r$  sera utilisée pour la correction de la thèse.

Notons que ce lemme a déjà de l'intérêt dans le cas où le domaine  $U$  est simplement connexe. Alors,  $r$  est son rayon coforme au sens classique.

## Un lemme utile

Le lemme suivant sera utilisé deux fois

**Lemme 3** *Pour tout ouvert  $O$  inclus dans le cylindre  $L = \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$  et contenant le demi-plan "Re( $z$ ) <  $-\pi$ ", il existe un ensemble fini ou dénombrable de points  $w_i \in O$ ,  $i \in I$ , tels que les domaines  $T(w_i)$  soient deux à deux disjoints, et tels que*

$$\bigcup_{w \in L \setminus O} T(w) \subset \bigcup_{i \in I} T_5(w_i)$$

où  $T_5(w) = T(5 \operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w))$  est un triangle de base 5 fois plus grande que  $T(w)$ . Par conséquent,

$$\sum_{i \in I} \text{aire } T(w_i) \leq \text{aire } \bigcup_{w \in L \setminus O} T(w) \leq C_3 \cdot \sum_{i \in I} \text{aire } T(w_i)$$

où  $C_3 = 25$ .

**Preuve** : Construisons par récurrence une suite  $W_n$  de sous-ensembles finis de points de  $L \setminus O$  dont la partie réelle appartient à l'intervalle  $[-\pi/2^n, -\pi/2^{n+1}[$  de la façon suivante. Étant donnés  $W_0, \dots, W_{n-1}$  tels que les triangles  $T(w)$  pour  $w \in W_0 \cup \dots \cup W_{n-1}$  sont deux à deux disjoints, considérons l'ensemble des points de  $L \setminus O$  dont la partie réelle appartient à l'intervalle  $[-\pi/2^n, -\pi/2^{n+1}[$ . Un sous-ensemble  $W$  tel que les triangles  $T(w)$  sont deux à deux disjoints possède au plus  $2^{n+1}$  éléments, car les segments de l'axe imaginaire correspondant à leurs bases doivent être deux à deux disjoints. Soit  $W_n$  un sous-ensemble maximal tel que les triangles  $T(w)$  pour  $w \in W_n$  sont disjoints des  $T(w)$  pour  $w \in W_0 \cup \dots \cup W_{n-1}$  :  $W_n$  est fini.

Maintenant, pour tout  $w \in L \setminus O$ , soit  $n$  tel que  $\operatorname{Re}(w) \in [\pi/2^n, \pi/2^{n+1}[$  : il existe  $w' \in W_0 \cup \dots \cup W_n$  tel que  $T(w) \cap T(w') \neq \emptyset$ . La hauteur de  $T(w')$  est  $> \pi/2^{n+1}$  et celle de  $T(w)$  est  $\leq \pi/2^n$ ,  $T(w) \subset 5T(w')$ , où  $5T(w')$  désigne le triangle homothétique à  $T(w')$ , de rapport 5 et de centre le milieu de la base de  $T(w')$ . On en

déduit que l'aire dans le cylindre de la réunion des  $T(w)$  pour  $w \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$  est  $\leq 25$  fois celle de la réunion des  $T(w)$  pour  $w \in L \setminus O$ . ■

La construction “à la Vitalli-Carathéodory” de cette preuve remplace l'argument de décomposition dyadique de [RZ]. En raisonnant plus finement, on peut faire descendre le facteur 25 à  $5 + \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$ , et peut-être même en deçà.

Voici une version adaptée pour le disque  $\mathbb{D}$ , allégée en vue de son application à la majoration de  $r$  :

**Lemme 4** *Pour tout ouvert  $U$  inclus dans  $\mathbb{D}$  et contenant le disque  $B(0, e^{-\pi})$ , il existe un ensemble fini ou dénombrable de points  $w_i \in U$ ,  $i \in I$ , tels que les domaines  $T(w_i)$  soient deux à deux disjoints dans le quotient  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ , et tels que*

$$\text{aire} \bigcup_{e^w \in i\mathbb{D} \setminus U} T(w) \leq C_3 \cdot \sum_{i \in I} \text{aire} T(w_i)$$

les aires étant mesurées dans le quotient.

Version allégée pour la minoration de  $r$  :

**Lemme 5**

$$\sum_{i \in I} \text{aire} T_5(w_i) \leq C_3 \cdot \text{aire} \bigcup_{e^w \in \mathbb{D} \setminus U} T(w)$$

les aires étant mesurées dans le quotient  $\mathbb{C}/i2\pi\mathbb{Z}$ .

## Preuve de la proposition 2

Traitons tout de suite le cas où il existe  $z \in \mathbb{D} \setminus U$  tel que  $|z| \leq e^{-\pi}$ . Soit  $z$  de module minimal, et  $u > 0$  tel que  $z = \exp(-u)$ . Alors  $u - \pi/2 \leq au$ , et  $e^{-u} \leq r \leq \frac{u}{\sinh u}$ , d'où

$$\frac{\ln(\sinh(u)/u)}{u} \leq \frac{|\ln r|}{a} \leq \frac{u}{u - \pi/2}$$

Une étude de fonction montre alors que

$$0.4 \leq \frac{|\ln r|}{a} \leq 2$$

Dans le cas où tous les point  $z \in \mathbb{D} \setminus U$  vérifient que  $|z| > e^{-\pi}$ , nous procéderons en deux étapes, en nous inspirant de [RZ].

### Majoration de $r$

Commençons par quelques calculs.

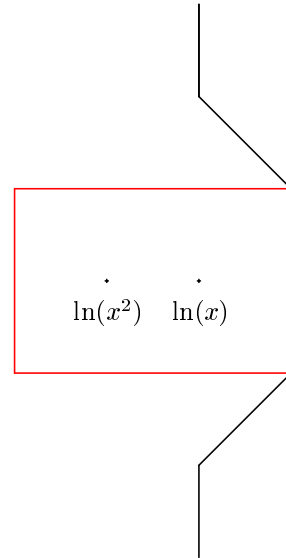
Étant donné  $z = \exp(w) \in \mathbb{D}$ , soit  $E(z) = \exp(D(w))$  où  $D(w) = \text{Im}(w) \cdot \mathbf{i} - \text{Re}(w) \times D_0$  et  $D_0$  est le sous ensemble de  $\mathbb{C}$  d'équation  $\text{Re}(w) \leq h(\text{Im}(w))$ , avec  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue définie par  $h(y) = -1$  pour  $y \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ ,  $h(y) = 0$  pour  $y \in [-1, 1]$ , et  $h$  affine sur les deux intervalles restant

**Lemme 6** *Il existe une constante universelle  $C_1$  telle que pour tout  $x \in [e^{-\pi}, 1[$ , soit  $x'$  le point image de  $x$  par la représentation conforme de  $E(x)$  sur  $\mathbb{D}$  qui envoie 0 sur 0 avec dérivée  $> 0$ . Alors*

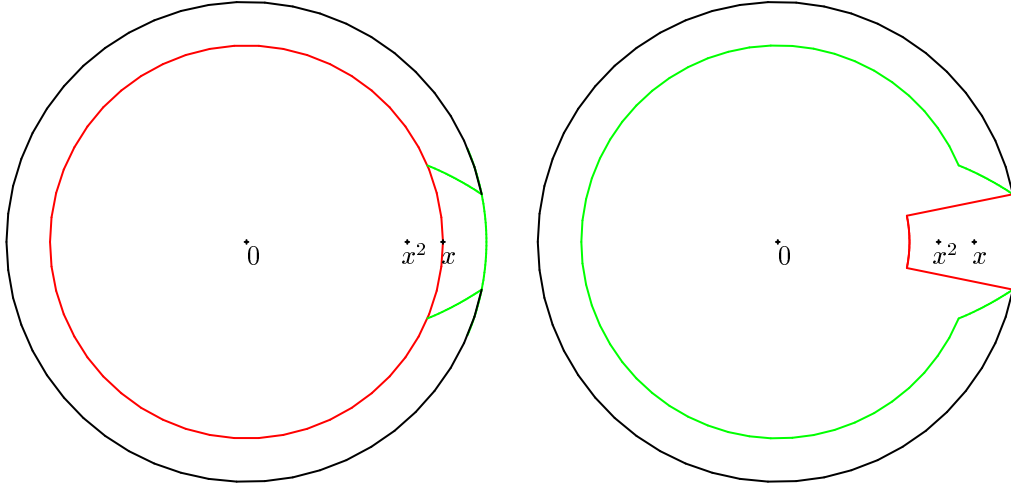
$$\frac{-\ln x'}{-\ln x} > C_1$$

**Preuve :**

Majorons la distance hyperbolique  $d$  dans  $E$  de 0 à  $x$ . Joignons d'abord 0 à  $x^2$ . Comme  $E$  contient le disque  $B(0, x)$ , la distance hyperbolique de 0 à  $x^2$  dans  $E$  est  $\leq$  celle dans  $B(0, x)$ , qui est égale à celle de 0 à  $x$  dans  $\mathbb{D}$ , c'est à dire  $\tanh^{-1}(x)$ . Maintenant, relient  $x^2$  à  $x$  :  $E$  contient un domaine, image injective par l'exponentielle d'un rectangle de même base que le triangle  $T(\ln(x))$  et de hauteur  $3/2$  de celle-ci. Sur ce rectangle, la distance hyperbolique de  $\ln(x^2)$  à  $\ln(x)$  est une constante universelle  $C_2$ , et il est facile de voir que  $C_2 < 1$ . Donc  $d \leq \tanh^{-1}(x) + C_2$ . Si on uniformise  $E$  sur  $\mathbb{D}$ , le point  $x$  est envoyé sur un point  $x'$  situé à distance hyperbolique de 0 égale à  $d$ , donc à distance euclidienne égale à  $\tanh(d)$ . On en déduit par une suite de calculs élémentaires que  $\frac{-\ln x'}{-\ln x} \geq \exp(-2C_2) \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} > 0.04$  (nous n'avons pas été très fins dans cette minoration). ■



Comme dans [RZ], nous considérons maintenant une suite décroissante  $U_i$  de sous-ensembles de  $\mathbb{D}$ . Classons les points  $z_i$  de sorte que leur normes forment une suite décroissante. Soit  $U_0 = \mathbb{D}$  et  $U_i = U_{i-1} \setminus \{z_i\}$ , c'est à dire que l'on retire successivement à  $\mathbb{D}$  les points en commençant par les plus proches du bord. Soit  $r_i$  le rayon conforme du revêtement universel de  $U_i$  :  $r_0 = 1$ . Pour tout  $i > 0$ , le domaine  $U_{i-1}$  contient  $E(z_i)$ . Soit  $\phi : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (U_{i-1}, 0)$  revêtement universel. Soit  $\psi$  la branche inverse définie sur  $E(z_i)$  et envoyant 0 sur 0. Soit  $x''_i = |\psi(z_i)|$ . Alors  $x''_i < x'_i$  où  $x'_i$  est le nombre correspondant à  $x = |z_i|$  dans le lemme 6. Donc, d'après les lemmes 6 et 1,



$$\begin{aligned}
-\ln \frac{r_i}{r_{i-1}} &\geq K_1 (\ln x_i'')^2 && \text{(lemme 1)} \\
&\geq K_1 (\ln x_i')^2 \\
&\geq C_1^2 K_1 (\ln |z_i|)^2 && \text{(lemme 6)} \\
&= C_1^2 K_1 \text{aire } T(w_i)
\end{aligned}$$

Soit  $K_2 = C_1^2 K_1$ . Ainsi  $\ln r_i - \ln r_{i-1} \leq -K_2 \text{aire } T(w_i)$ . Donc, en notant  $r$  le rayon conforme du revêtement universel de  $U$ ,

$$\ln r \leq -K_2 \sum_{i \in I} \text{aire } T(w_i)$$

et donc d'après le lemme 4,

$$\ln r \leq -\frac{K_2}{C_3} \text{aire} \bigcup_{e^w \in \mathbb{D} \setminus U} T(w) = -Ka$$

La constante  $K = 2\pi K_2 / C_3$  que nous avons obtenue est très petite (elle vaut approximativement  $1/20000$ ), mais nous n'avons pas cherché à optimiser le calcul.

### Minoration de $r$

Cette minoration n'interviendra pas dans la correction de la thèse.

Le lemme suivant peut avoir son utilité dans d'autres contextes :

**Lemme 7** *Soit  $W \subsetneq \mathbb{C}$  un disque topologique contenant 0. Pour tout fermé  $A$  ne contenant pas 0 tel que la composante connexe  $U$  de  $W \setminus A$  contenant 0 est*



simplement connexe, soit  $\lambda(A) = r(U)/r(W)$  où  $r(\cdot)$  désigne le rayon conforme par rapport à 0.

Si  $A$  et  $B$  sont deux fermés vérifiant les conditions ci-dessus, alors  $A \cup B$  les vérifie, et

$$\lambda(A \cup B) \geq \lambda(A)\lambda(B)$$

**Preuve :** Soit  $\mathbb{S}^2$  la sphère de Riemann. Nous utiliserons les deux résultats de topologie suivants. Un ouvert connexe et simplement connexe de  $\mathbb{S}^2$  a son complémentaire connexe. Toute composante connexe du complémentaire d'un fermé connexe de  $\mathbb{S}^2$  est simplement connexe. Soit maintenant  $U$  associé à  $A$  et  $U'$  à  $B$ . Par hypothèse,  $\mathbb{C} \setminus U$  est connexe et  $\mathbb{C} \setminus U'$  aussi. Comme ils contiennent tout deux  $\mathbb{C} \setminus W$ , leur réunion  $\mathbb{C} \setminus (U \cap U')$  est connexe. La composante connexe  $U''$  de  $W \setminus (A \cup B)$  qui contient 0 est également la composante connexe de  $U \cap U'$  qui contient 0. Donc elle est simplement connexe.

Considérons la fonction de Green  $g$  de  $W$  en 0, et  $g_A$  (resp.  $g_B, g_{A \cup B}$ ) celle de la composante de  $W \setminus A$  contenant 0 en 0 (et ainsi de suite). Par fonction de Green nous entendons le supremum des fonctions sous-harmoniques positives s'annulant au bord et inférieures à  $c \text{ste} - \ln|z|$  en 0 : c'est une fonction harmonique positive s'annulant au bord et ayant en 0 pour développement limité  $-\ln(z) + \ln(r) + o(1)$  où  $r$  est le rayon conforme. Soit la fonction  $h = g + g_{A \cup B} - g_A - g_B$ , définie sur  $U''$ . Cette fonction est harmonique, même en 0. L'inégalité de l'énoncé équivaut à  $h(0) \geq 0$  (notons que nous avons, d'après les inclusions entre les divers ensembles,  $g \geq g_A \geq g_{A \cup B}$  et  $g \geq g_B \geq g_{A \cup B}$ , mais que cela n'implique pas  $h(0) \geq 0$ ). Par le principe du minimum, il suffit de montrer que les valeurs d'adhérences de  $h$  au bord de  $U''$  sont  $\geq 0$ . Tout point  $z$  au bord de  $U''$  est dans le bord d'au moins un des trois ensembles  $W, U$ , ou  $U'$ . Au bord de  $W$ , les quatre fonctions tendent vers 0. Au bord de  $U$ , en termes de valeurs d'adhérences,  $g_A$  est nulle,  $g \geq g_B$  et  $g_{A \cup B} \geq 0$ , donc  $h \geq 0$ . De même pour le bord de  $U'$ . ■

On peut formuler ce résultat ainsi : pour les domaines simplement connexes, quand on enlève un même morceau à deux domaines l'un contenant l'autre, la perte relative de rayon conforme est moindre pour le domaine le plus petit.

Reprenons la suite  $z_i = \exp(w_i)$  où  $w_i$  est fournie par le lemme 3, et soit  $V_5(z_i) = \exp(T_5(z_i))$ . L'ouvert  $U' = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i \in I} V_5(z_i)$  est inclus dans  $U$ . Son rayon conforme est donc inférieur à celui de  $U$ . D'autre part, il est simplement connexe (car étoilé par rapport à 0). D'après le lemme 7, son rayon conforme est supérieur au produit des pertes induites par chaque  $V_5(z_i)$  pris isolément. Comme dans le lemme 1, la contribution d'un seul triangle est de l'ordre de son aire :

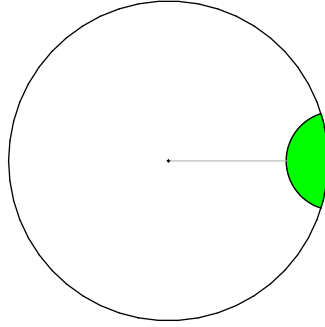
**Lemme 8** Soit  $u > 0$ ,  $x = \exp(-u)$ ,  $U$  la composante connexe contenant 0 de  $\mathbb{D}$  privé de la géodésique passant par  $x$  et orthogonale à  $(0x)$ , et  $r$  le rayon conforme

associé à  $U$ . Alors

$$r = 1 / \cosh(u)$$

Quand  $u \rightarrow 0$ ,

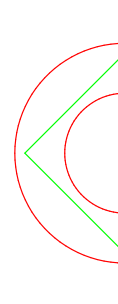
$$r = 1 - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$$



**Lemme 9 (contribution d'un triangle)** Il existe des constantes  $K_3 > K_4 > 1$  telle que si  $0 < u \leq \pi$ ,  $x = e^{-u}$ ,  $U = \mathbb{D} \setminus \{V_5(x)\}$ , et  $r$  est le rayon conforme associé à  $U$ , alors

$$-\ln(r) / \text{aire } T_5(u) \in [K_4, K_3]$$

**Preuve :** Par un argument de continuité, il suffit de s'intéresser au cas où  $u$  est proche de 0. On peut alors placer le bord de  $V_5(x)$  qui est très proche d'un triangle entre deux géodésiques comme sur la figure ci-contre. Avec des bases commensurables, leur aire est commensurable. On conclut ensuite avec le lemme 8. Nous trouvons que  $K_3 = 8/2\pi$  convient. ■



D'après le lemme 7

$$\ln r' \geq \sum_{i \in I} -K_3 \text{aire } T_5(w_i)$$

d'où

$$\begin{aligned} \ln r &\geq \ln r' \geq -K_3 \sum_{i \in I} \text{aire } T_5(w_i) \\ &\geq -K_3 C_3 \cdot \text{aire} \bigcup_{\exp(w) \in \mathbb{D} \setminus U} T(w) \end{aligned}$$

d'après le lemme 5.

On obtient ainsi une constante  $K' = 2\pi K_3 C_3$ . Dans nos estimation,  $K' = 200$ , ce qui n'est pas excellent.

### III. Application à la correction de la thèse

Nous n'utiliserons que la majoration de  $r$  dans la proposition 2.

**Lemme 10** *Pour tout  $u > 0$ , soit  $T$  le triangle plein fermé de sommets  $-u, i\pi$  et  $-i\pi$ . La plus petite longueur hyperbolique  $l(u)$  dans  $\mathbb{D}$  d'un chemin évitant 0 et dont le relevé relie  $T$  à un translaté de  $T + 2i\pi$ , tend vers  $+\infty$  quand  $u \rightarrow 0$ .*

Nous le reformulerons ainsi : pour passer le cône de paramètre  $u$ , un chemin doit avoir une longueur  $\geq l(u)$ .

**Lemme 11** *Pour tout  $d > 0$ , il existe une constante  $K(d) > 1$  telle que pour tout ensemble fini de points  $z_0, z_1, \dots, z_n = z_0$  de  $\mathbb{D}$ , non nuls, tels que  $z_{i+1}$  et  $z_i$  sont reliés par un chemin  $\gamma_i$  évitant 0, de longueur hyperbolique  $\leq d$  dans  $\mathbb{D}$ , et tels que la concaténation des  $\gamma_i$  fait au moins un tour autour de 0, si on note  $\mathcal{Z} = \{z_i\}_{i=1\dots n}$  et  $r'$  le rayon conforme de  $\mathbb{D} \setminus \mathcal{Z}$ , alors*

$$\ln r' \leq \frac{\ln(\max |z_i|)}{K(d)} (< 0)$$

**Preuve** : Autrement dit, si on note  $m = \max |z_i|$ ,

$$\frac{-\ln r'}{-\ln m} \geq \frac{1}{K(d)}$$

Premier cas : l'un des points de  $\mathcal{Z}$  est à distance  $< e^{-\pi}$  de 0. Soit  $z_k$  le point le plus proche de 0. Notons  $|z_k| = \exp(-u)$  :  $\ln m \geq -u$ . D'autre part,  $r'$  est plus petit que le rayon conforme de  $\mathbb{D} \setminus \{z_k\}$ , donc  $\ln r' < \ln(u/\sinh u)$ , d'où  $-\ln r' / -\ln m > \ln(\sinh u/u)/u > \ln(\sinh(\pi)/\pi)/\pi > 0.4$ , car  $u > \pi$  et  $u \mapsto \ln(\sinh u/u)/u$  est une fonction strictement croissante.

Deuxième cas : tous les points de  $\mathcal{Z}$  sont à distance  $\geq e^{-\pi}$ . Soit  $u > 0$  tel que  $u < \pi$  et  $l(u) > d$  dans le lemme 10. A un élément  $z \in \mathcal{Z}$ ,  $z = \exp(w)$ , on associe un intervalle de  $i\mathbb{R}/i2\pi\mathbb{Z}$ , de centre  $i\operatorname{Im}(w)$  et de longueur  $2\pi|\operatorname{Re}(w)|/u$ , noté  $I(z)$ . La réunion des  $I(z)$  pour  $z \in \mathcal{Z}$  recouvre tout le quotient  $i\mathbb{R}/i2\pi\mathbb{Z}$ . En effet, supposons par l'absurde qu'un point  $iy$  échappe à cette réunion. Chaque  $\gamma_i$  a une longueur hyperbolique dans  $\mathbb{D}$  qui est  $\leq d$ , donc  $< l(u)$ . Or la succession des  $\gamma_i$  fait au moins un tour autour de 0, donc doit passer d'un côté à l'autre du cône issu de  $iy$  et de paramètre  $u$ , or d'après le lemme précédent il est trop court pour cela.

On sélectionne maintenant un sous-ensemble  $E$  de  $\mathcal{Z}$  dont les intervalles  $I(z)$  sont deux à deux disjoints, en commençant par le plus grand, puis en sélectionnant par récurrence le plus grand parmi ceux qui restent et qui sont disjoints de ceux déjà sélectionnés. Alors, la réunion des intervalles de même centres et de longueur triple recouvre tout  $i\mathbb{R}/i2\pi\mathbb{Z}$ . Comme les éléments  $I(z)$  pour  $z \in E$  sont deux à deux disjoints, et contiennent la base de  $T(z)$ , les  $T(\ln z)$  pour  $z \in E$  sont deux à deux

disjoints. Donc l'aire de leur réunion est égale à la somme de leurs aires, elle même égale à

$$\begin{aligned}
\sum_{z \in E} |\operatorname{Re}(w)|^2 &= \sum_{z \in E} \frac{u|I(z)|}{2\pi} |\operatorname{Re}(w)| \\
&\geq \sum_{z \in E} \frac{u|I(z)|}{2\pi} |\ln m| \\
&\geq \frac{u|\ln m|}{2\pi} \sum_{z \in E} |I(z)| \\
&\geq \frac{u|\ln m|}{2\pi} \frac{2\pi}{3} \\
&\geq \frac{u}{3} |\ln m|
\end{aligned}$$

Ainsi l'aire de  $\bigcup_{\exp(w) \in \mathcal{Z}} T(w)$  est minorée par une valeur proportionnelle à  $|\ln m|$  (avec un coefficient dépendant de  $d$ ). Il suffit alors d'appliquer la proposition 2. ■

**Lemme 12** *Pour tout  $d > 0$ , pour toute fonction  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  fixant 0 et tous  $r \in ]e^{-1}, 1[$  et  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$ , tels que la distance hyperbolique dans  $\mathbb{D}$  entre  $r$  et  $r \exp(i2\pi/q)$  est  $\leq d$ , alors*

$$\ln(r') \leq \ln(r)/K(d) (< 0)$$

où  $r'$  est le rayon conforme de  $\mathbb{D} \setminus f(r\mathbb{U}_q)$ , et  $K(d)$  est la constante du lemme précédent.

**Preuve :** Il suffit de prendre pour  $\gamma_i$  l'image par  $f$  de la géodésique qui relie  $r \exp(i2\pi i/q)$  à  $r \exp(i2\pi(i+1)/q)$ . Si l'un d'entre eux touche 0 il suffit de considérer une valeur de  $r$  légèrement inférieure et de passer à la limite. Le nombre de tours autour de 0 de la concaténation de ces chemins est égal à au nombre de fois que  $f$  atteint 0 et donc est  $> 0$ . ■

Pour conclure, remarquons que pour toute valeur de  $d$ , il existe une constante  $R(d) > 0$  telle que si  $q \geq 3$ ,  $r \geq e^{-1}$ , (valeurs que j'ai fixées arbitrairement), et si  $q|\ln(r)| \geq R(d)$ , alors la condition sur les distances hyperboliques des lemmes précédents est vérifiée.

## Conclusion

Je pense que les constantes  $K'$  et  $K$  peuvent être considérablement améliorées. On peut également chercher à remplacer la forme triangulaire par une autre, pour avoir un quotient  $K'/K$  encore meilleur (dans le présent article, nous obtenons un quotient de l'ordre de  $4.10^6$ ).

## Remerciements

Je tiens à remercier Xavier Buff, Adrien Douady, et Michel Zinsmeister pour d'utiles discussions. La question de départ, pendant que j'en rédigeait une preuve (erronée), a inspiré à Douady une question différente analogue. Rohde et Zinsmeister l'ont résolue. En présentant ma démonstration à Buff, nous nous sommes rendu compte d'une erreur dans la preuve d'un des lemmes. Le présent addendum reprend certaines des idées de Rohde et Zinsmeister pour corriger cela. En même temps, Buff a exploré une approche plus élégante pour corriger ce lemme, qu'il a menée à bien en démontrant un résultat général fort élégant.

## Références

- [C] A. Chéritat. *Recherche d'ensembles de Julia de mesure de Lebesgue positive*. Thèse, Université Paris-Sud, France, 2001.
- [RZ] S. Rhode, M. Zinsmeister. *Variations of the conformal radius*. ETC...